

М. РЕЙНЕР

РЕОЛОГИЯ

М. РЕЙНЕР

РЕОЛОГИЯ

Перевод с английского
Н. И. МАЛИНИНА

под редакцией
Э. И. ГРИГОЛЮКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

532

P 35

УДК 532.135

HANDBUCH DER PHYSIK

Herausgegeben von S. Flügge

Bd. VI

ELASTIZITÄT UND PLASTIZITÄT

M. REINER

RHEOLOGY

Springer-Verlag

Berlin—Göttingen—Heidelberg

1958

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
А. Общие положения	7
I. Введение	7
1. Некоторые определения	7
2. Элементы механики	11
3. Некоторые сведения из классической кинематики	12
4. Некоторые сведения из динамики	16
5. Энергетические соотношения	17
6. Реологический метод и план книги	18
7. Математический аппарат реологии	21
8. Реологические свойства	31
II. Классические тела	33
9. Уравнение для объемных деформаций	33
10. Твердое тело Гука	34
11. Ньютонова жидкость	36
12. Тела Сен-Венана и Прандтля	38
В. Макрореология	41
I. Явления первого порядка	41
13. Реологическое древо	41
14. Вязко-пластическое или бингамово тело	48
15. Упругое последствие и тело Кельвина	58
16. Упруго-вязкость, тело Максвелла	63
17. Упругие золи и тело Лесерсича	66
18. Релаксирующие гели и тело Джеффриса	69
19. Неупругость и тело Пойнтинга — Томсона	73
20. Вязко-упругость, тело Бюргерса	75
21. Пластические гели, или тела Шведова	78
22. Мучное тесто как пример сложного тела	80
23. Более сложные тела	86
24. Объемная вязкость	91
25. Недостатки классической теории	98
II. Явления высших порядков	103
26. Физическая нелинейность в упругости	103
27. Высокая эластичность резин	112
28. Структурная вязкость	116
29. Геометрическая нелинейность	123
30. Тензорная нелинейность	138

31. Эффект Пойнтинга	141
32. Эффекты второго порядка при вязком течении	146
33. Эффект Вейссенберга	149
34. Идеальное тело Максвелла	152
35. Эффект центростремительного нагнетания в воздухе	155
III. Прочность	158
36. Классические критерии	158
37. Реологические критерии	161
C. Микрореология	164
38. Общие положения	164
39. Разбавленные золи	168
40. Дисперсии в жидкостях	172
41. Дисперсии в твердых телах	174
42. Дисперсные системы высокой объемной концентрации	177
43. Реологическое исследование структурной вязкости	181
D. Реометрия	188
44. Метод	188
45. Простое растяжение и сжатие	191
46. Технологические свойства	196
E. Добавления	202
Библиография	214
Условные обозначения	217
Именной указатель	219
Предметный указатель	221

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Реология — наука о деформациях и текучести вещества — выделилась в самостоятельную область механики сплошных сред сравнительно недавно, два-три десятилетия тому назад. За это время реологические методы получили весьма широкое распространение при проведении физических и физико-химических исследований веществ, а также для решения разнообразных технологических задач в металлургии, производстве пластмасс и полимеров, промышленности стекла и строительных материалов и т. п., в горном деле, строительстве, на транспорте и в медицине.

К сожалению, до последнего времени на русском языке не было сколько-нибудь систематического изложения основ реологии. Настоящая книга, являющаяся переводом с английского главы «Реология» из VI тома немецкой «Физической энциклопедии», в известной мере восполняет этот пробел.

Автор книги, профессор Иерусалимского университета М. Рейнер, широко известен своими многочисленными исследованиями в области реологии, первые из которых были выполнены в десятых годах нашего столетия. Советский читатель знаком с М. Рейнером по переводам на русский язык его книг «Десять лекций по теоретической реологии» (Москва, 1947), «Деформация и течение» (Москва, 1963), а также главы «Феноменологическая макрореология» из трехтомника «Rheology, Theory and Applications» (New York, 1956—1960), первый том которого переведен и издан в 1962 г. Издательством иностранной литературы.

¹⁾ Перевод первой и третьей глав этого тома издан в виде отдельных книг (Снеддон И., Берри Д., Классическая теория упругости, Москва, 1961; Фрейденцаль А., Гейрингер Х., Математические теории неупругой сплошной среды, Москва, 1962).

В предлагаемой вниманию читателя книге обсуждаются некоторые общие вопросы геометрии и механики деформации, описываются основные модели сплошной среды, такие, как упругое тело Гука, пластическое тело Сен-Венана и вязкая жидкость Ньютона. Анализируется более сложное поведение материалов при одномерном, а также при сложном напряженном состоянии. Разбираются явления высших порядков, которыми обычно пренебрегают в классических теориях, как, например, эффект нормальных напряжений Вейссенберга, имеющий важное значение в смазке машин. Рассмотрены деформационные, главным образом вязкостные, свойства многофазных систем. Наконец, кратко освещены методы определения реологических характеристик реальных материалов.

Книга по стилю изложения и по представленному в ней материалу в значительной мере отличается от вышеназванных работ М. Рейнера, переведенных на русский язык. От книги «Деформация и течение», представляющей собой конспект курса лекций для химиков, она отличается тем, что изложение ведется в большей мере на математическом, а не на описательном уровне, причем широко используются тензорные представления. По сравнению с «Десятью лекциями», а также с «Феноменологической макрореологией» данная книга отличается значительно большей полнотой изложения (в частности, в ней впервые на русском языке освещены методы микрореологии).

В целом книга представляет интерес для студентов, аспирантов, а также специалистов различных отраслей промышленности, которым приходится сталкиваться с реологическими методами в своей практической и научной деятельности.

Несмотря на то, что со времени опубликования книги М. Рейнера на английском языке прошло около шести лет, она не потеряла своего значения и, несомненно, принесет пользу читателям, впервые знакомящимся с основами реологии.

Э. Григолюк

А. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

І. Введение

1. **Некоторые определения**¹⁾. Слово «реология» происходит от греческого «ρεω», что означает «теку». Однако оно употребляется в более широком смысле: под ним понимается раздел физики, изучающий деформации материалов.

Деформацией D называется относительное смещение частиц материального тела, при котором не нарушается непрерывность самого тела. Если под действием конечных сил деформация тела увеличивается во времени непрерывно и необратимо, то это означает, что материал *течет*. *Пластическое течение* возникает только в том случае, когда силы превышают некоторый предел, называемый *пределом текучести* материала. *Вязкое течение* происходит под действием любых сил, как бы малы они ни были; однако скорость деформации уменьшается при уменьшении сил, а при их исчезновении обращается в нуль. Деформация тела вызывается *нагрузками P* , которые вместе с реакциями опор и объемными силами образуют систему *внешних сил*. После прекращения действия сил деформация частично исчезает.

Деформация, исчезающая при разрузке, называется *упругой деформацией e* . Из приведенного определения следует, что с помощью одной лишь диаграммы нагружения,

1) Часто возникают значительные трудности при применении к реальным явлениям терминологии, употребляемой в этой и других главах. Так, например, в некоторых случаях трудно определить, является ли деформация обратимой. Иногда необратимая деформация исчезает при слабом механическом воздействии на систему.

представляющей общую деформацию, мы не можем найти упругой деформации; только путем разгрузки можно установить, какая именно часть деформации обратима. Свойство деформированных тел восстанавливать свою форму называется *упругостью*. Обычно *упругие деформации* исчезают после снятия нагрузки. Однако в результате некоторых технологических процессов (например, прокатки мягкой стали, усадки бетона или затвердевания сыра ¹⁾) тело может быть самонапряжено, т. е. в нем возникают напряжения даже при отсутствии внешних сил. В любом случае *при отсутствии напряжений нет и упругой деформации*. Наоборот, хотя появление вязких и пластических деформаций сопровождается напряжениями, деформации не обязательно исчезают при разгрузке; *такие деформации существуют и без напряжений*. Исследование различных видов деформаций в зависимости от сопровождающих их напряжений составляет предмет *реологии*. Следует отметить, что *возможны изменения объема без появления напряжений*; они возникают в результате изменения температуры или содержания влаги в таких материалах, как, например, дерево, бетон и грунты, а при отсутствии сопротивления даже при своем возникновении могут быть не связаны с напряжениями. Несмотря на то, что исследование таких деформаций не входит в предмет реологии, их необходимо принимать во внимание при реологических исследованиях.

Феноменологическая реология изучает однородные или квазиоднородные материалы в предположении, что они являются *сплошными средами*, т. е. изучает их на феноменологическом уровне. Вне пределов реологии остаются как элотропные кристаллы, так и предельные дискретные образования, например молекулы и атомы. В реологии, в отличие от термодинамики, предполагается, что процессы происходят в *изотермических* условиях, например при помещении вискозиметров в термостаты.

Макрореология рассматривает все материалы в том виде, в каком они предстают перед наблюдателем при поверхностном осмотре невооруженным глазом, т. е. она

¹⁾ Reiner M., Scott Blair G. W., Mocquot G., Lait 29, 351 (1949),

считает их однородными и лишенными структуры. Феноменологически однородными являются только чистые жидкости и совершенные монокристаллы. Большая часть материалов, исследуемых реологией, представляет собой *дисперсные системы*, состоящие из двух или более фаз; одной из таких фаз обычно бывает воздух, заполняющий поры, которые могут быть видимыми или невидимыми. Например, такой на первый взгляд однородный материал, как золото, имеет плотность, возрастающую от 19,258 до 19,367 г/см³ при сжатии в штампе для чеканки (Кельвин (1875))¹⁾.

С точки зрения реологии дисперсные системы можно разделить на *золи*, которые ведут себя, как жидкости, на *студни*²⁾, обладающие свойствами твердых тел, и на *гели*, занимающие промежуточное положение. В золях сплошная фаза, или *дисперсионная среда*, является жидкостью; *дисперсная фаза* может быть жидкой в случае *эмульсии* или твердой в случае *суспензии*. В геле преобладает твердая фаза, которая, однако, не всегда имеет однородную структуру в пределах всего объема тела. Структура геля может быть губчатой, когда отдельные зерна разделяются тонкими слоями аморфной фазы. Используя такое представление, поликристаллический металл можно рассматривать как гель, в котором тонкие слои атомной разупорядоченности между кристаллами образуют «жидкую» фазу. Даже вода с этой точки зрения рассматривалась как структура, образованная из «водных кристаллов», но отличающаяся от структуры поликристаллического металла легкостью, с которой молекулы воды под действием тепловых колебаний покидают свои регулярные места в решетке, образуя «дефекты Френкеля»³⁾. Как предельный случай материала, который реолог

1) Если в тексте приводится только год публикации, то название издания см. в разделе «Библиография».

2) В оригинале *jellies*. В советской коллоидно-химической литературе нет разделения твердообразных дисперсных систем на студни и гели; эти термины считаются тождественными. (Прим. ред.)

3) Сравни главу VII, написанную Форслиндом, в книге М. Рейнера (1954). Структура жидкостей детально обсуждается в статье Грина *Struktur der Flüssigkeiten* в X томе «Handbuch

может рассматривать как гель, назовем бетон. В хорошем бетоне твердый скелет образуют крупные агрегаты (щебень, гравий), промежутки заполнены цементным раствором. Сам раствор, содержащий мелкие агрегаты (песок) и цемент, может рассматриваться как жидкая фаза. В общем случае раствор может заполнять не все промежутки между крупными агрегатами скелета; структура же, образованная последними, может в свою очередь не полностью охватывать объем бетона.

С другой стороны, в качестве золь в феноменологической реологии рассматриваются такие системы, у которых дисперсная фаза состоит из молекул, образующих высокодисперсные частицы, отличающиеся от крупных тел лишь размерами ¹⁾).

Материал *квазиоднороден* в том случае, когда размер наибольшего из диспергированных элементов меньше, чем размеры самых малых элементов объема, деформация которых составляет предмет исследования. Бетон, как это следует из вышеизложенного, может рассматриваться как квазиоднородный, если размеры отдельных структурных элементов его много больше размеров наибольших камней в его составе.

Материал считается *квазиизотропным*, если самый малый элемент объема содержит анизотропные диспергированные элементы всевозможных ориентаций. Таковы, например, промышленные поликристаллические металлы, если составляющие их кристаллы ориентированы беспорядочным образом. Квазиизотропный материал может стать анизотропным в результате деформации (например,

der Physik», Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960. Грин пишет: «Жидкости имеют молекулярную структуру, лишённую дальнего порядка при наличии довольно плотной упаковки, причем любая молекула находится в непрерывном взаимодействии со своими соседями». Даже в газах могут существовать агрегаты из двух и более молекул, количество которых растёт с увеличением плотности. Это может быть причиной вязкоупругости воздуха, как описано ниже, в § 35. [Более подробно см. Френкель Я. И., Кинетическая теория жидкостей, М., 1945. (Прим. ред.)]

1) Заметим, что обычно золями называют такие коллоидные системы, нерастворимая дисперсная фаза у которых очень сильно размельчена и равномерно распределена по объёму дисперсионной среды. (Прим. ред.)

листовой металл после прокатки или металлический прут — после вытяжки).

Микрореология рассматривает реологическое поведение двух- и многофазных систем в зависимости от реологических свойств их компонент. Первым и наиболее известным микрореологическим исследованием является работа Эйнштейна (1906, 1911), посвященная выводу соотношения для вязкости суспензии, о чем более подробно говорится в § 40. В этой работе предполагалось, что твердая фаза состоит из жестких шариков, а все остальное пространство непрерывным образом заполнено простой вязкой жидкостью. За исключением простейших случаев, такой математический подход непригоден ввиду сложности действительного строения дисперсных систем. Поэтому вместо системы с неизвестной структурой вводится *механическая модель*, причем предполагается, что эта модель ведет себя аналогично реальной системе. Такие модели различных элементов, например из упругих пружин, гидравлических амортизаторов, элементов сухого трения, в общем не всегда точно отражают поведение реальных материалов. Подробнее об этом см. ниже, в § 13.

Там, где феноменологическая реология граничит с другими областями знаний — физикой, химией, психофизиологией и др., — возникает область взаимодействия соответствующих наук, которая может быть названа *метареологией*. Эти вопросы затрагиваются в других статьях данного тома ¹⁾. Вопросы психофизиологии не представлены в данной книге; они рассмотрены в работах Скотт-Блера и его школы (1949).

2. Элементы механики. Ввиду того, что каждая частица материала может рассматриваться как тело, подчиняющееся при своем движении законам механики, реология основывается на законах механики. Рассматривая частицу как *элемент объема* тела, мы можем записать для нее *шесть уравнений динамики* ²⁾ в форме

$$\sum P_i = 0, \quad \sum M_i = 0. \quad (2.1)$$

¹⁾ То есть в VI томе «Handbuch der Physik», Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958. (Прим. перев.)

²⁾ Если нет особых оговорок, то отсчет производится в декартовых координатах. Тензорными индексами являются обычно *l* и *m*.

Они приведены здесь в виде уравнений равновесия с учетом принципа Даламбера. Силы, действующие на элемент объема, могут быть *объемными силами* B , как, например, вес, пропорциональными массе элемента или *поверхностными силами*. Последние могут быть внешними силами, действующими на часть поверхности элемента, совпадающую с поверхностью тела, или внутренними, действующими на рассматриваемый элемент со стороны остальной части тела в соответствии с законом Ньютона о действии и противодействии. Поверхностная сила, отнесенная к единице площади, называется *напряжением*. Совокупность напряжений, возникающих в рассматриваемой точке на площадках, ориентированных различным образом по отношению к координатным осям, определяет *напряженное состояние в точке*, представляющее собой тензор второго ранга s_{lm} . Из второго уравнения (2.1) ¹⁾ следует, что этот тензор является симметричным, т. е.

$$s_{lm} = s_{ml}, \quad (2.2)$$

и, следовательно, определяется шестью компонентами. Оставшихся трех первых уравнений динамики (2.1) недостаточно для определения тензора напряжений, и задача поэтому является трижды *механически неопределимой*.

3. Некоторые сведения из классической кинематики. Кинематическое состояние тела определяется координатами x_l всех частиц ²⁾ деформированного тела в любой момент времени t , причем «начальные» координаты при $t = 0$ обозначаются ${}_0x$. Сплошность тела сохраняется, если две близкие в момент времени t частицы остаются близкими и спустя промежуток dt после t , или, другими словами, бесконечно малые *перемещения* частиц du за период dt являются непрерывными функциями координат, следовательно ³⁾,

$$du_l = u_{l,\alpha} dx_\alpha. \quad (3.1)$$

¹⁾ Равенство (2.2) неприменимо, если материал обладает магнитными свойствами. Таким образом, симметрия тензора напряжений является предположением, называемым «постулатом Больцмана».

²⁾ Частицы условно рассматриваются как материальные точки, обладающие конечной определенной массой.

³⁾ Мы обозначаем дважды встречающиеся индексы греческими буквами, опуская знак \sum , и под $u_{l,m}$ подразумеваем $\partial u_l / \partial x_m$.

Переходя от точки с координатой x_l в некотором направлении ds к соседней точке с аналогичной координатой $x_l + dx_l$, имеем:

$$dx_l = ds [ds \cdot x_l], \quad (3.2)$$

где $[ds \cdot x_l]$ — направляющий косинус угла (ds, x_l) , и уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{du_l}{ds} = u_{l,\alpha} [ds \cdot x_\alpha]. \quad (3.3)$$

Таким образом, мы приходим к *тензору градиентов смещений*

$$\gamma_{lm} = u_{l,m}. \quad (3.4)$$

Вообще говоря, этот тензор несимметричен.

Особым случаем такого перемещения является *простой сдвиг*, описываемый уравнениями

$$u_x = \gamma y, \quad u_y = u_z = 0. \quad (3.5)$$

Если другой простой сдвиг

$$u_y = -\gamma x, \quad u_z = u_x = 0 \quad (3.6)$$

накладывается дополнительно и γ является бесконечно малой величиной, то тело поворачивается, как показано на рис. 1, а деформация исчезает. Этот пример показывает, что тензор градиента перемещений непригоден для определения деформации. Антисимметричный тензор

$$\omega_{lm} = \frac{1}{2} (u_{l,m} - u_{m,l}) \quad (3.7)$$

является мерой *бесконечно малого вращения среды*¹⁾. Следовательно, *бесконечно малая относительная деформация*²⁾ за промежуток времени dt может быть определена

1) Даже абсолютно твердое тело может испытывать вращение, поэтому оно не представляет большого интереса для реологов. Однако подобные явления описаны автором (Physics Today 9, 16, 1956).

2) Если при растяжении стержня с начальной длиной l_0 последняя увеличивается до l , то удлинение Δl представляет собой *абсолютную деформацию*, отношение $\Delta l/l_0$ — *относительную деформацию*. Обычно под выражением «деформация» понимается «относительная деформация». В дальнейшем, за исключением особых случаев, мы будем следовать этому правилу.

симметричным тензором

$$d_{lm} = \gamma_{lm} - \omega_{lm} = \frac{1}{2} (u_{l,m} + u_{m,l}), \quad (3.8)$$

устанавливающим меру деформации по Коши.

Полагая

$$v_l = \dot{u}_l, \quad (3.9)$$

аналогично получим тензор течения (скоростей деформации)¹⁾:

$$f_{lm} = \frac{1}{2} (v_{l,m} + v_{m,l}) = \dot{d}_{lm}. \quad (3.10)$$

Если перемещение u_l исчезает после снятия нагрузки, то правая часть уравнения (3.8) определяет тензор бесконечно малой упругой деформации ε_{lm} .

Таковы обычные методы классической механики сплошных сред. Тензор деформации, как и любой тензор, может быть разложен на изотропную компоненту и *девиатор* (последний обозначается индексом (0)) в соответствии с уравнением

$$d_{lm} = \frac{1}{3} d_{\alpha\alpha} \delta_{lm} + d_{lm(0)}. \quad (3.11)$$

В этом случае

$$d_{\alpha\alpha} = I_d \quad (3.12)$$

— первый инвариант тензора бесконечно малой деформации, идентичный относительной деформации объема d_v ; второй член определяет *искажение*, или *формоизменение*, при постоянном объеме. Аналогично

$$\varepsilon_{lm} = \frac{1}{3} \varepsilon_{\alpha\alpha} \delta_{lm} + \varepsilon_{lm(0)} \quad (3.13)$$

и

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = I_\varepsilon = \varepsilon_v, \quad (3.14)$$

¹⁾ Автор различает тензор течения, обозначаемый f_{lm} , и тензор скоростей деформации \dot{d}_{lm} . Различие между ними заключается в том, что деформации, определяемые компонентами тензора f_{lm} , необратимы, а деформации \dot{d}_{lm} могут быть частично или полностью обратимыми. (Прим. ред.)

где ε_v — упругая деформация объема. При разложении тензора течения f_{lm} на компоненты обычно полагают, что деформации объема являются упругими и

$$f_{\alpha\alpha} = I_f = f_v = 0; \quad (3.15)$$

поэтому тензор течения тождественен своему девиатору.

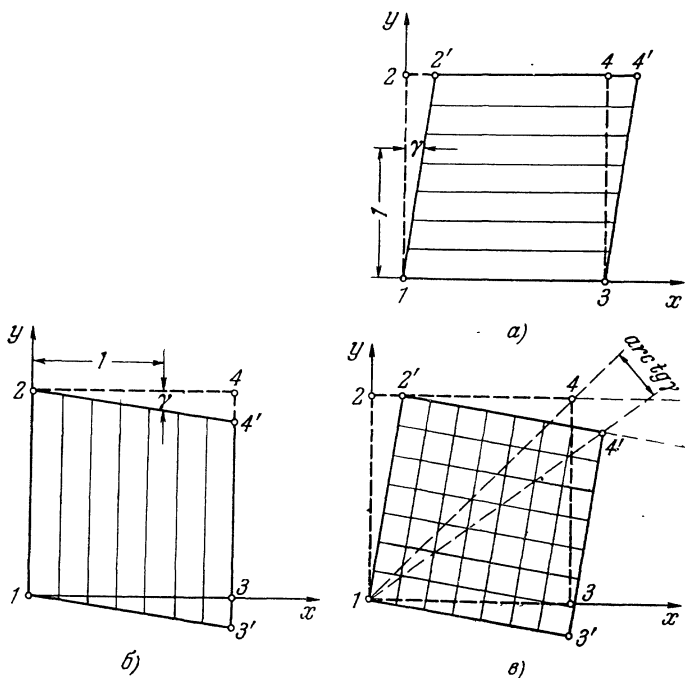


Рис. 1. Наложение двух простых сдвигов, вызывающих поворот. Здесь γ — величина сдвига, равная тангенсу угла поворота. а) Простой сдвиг, параллельный плоскости xz . б) Простой сдвиг, параллельный плоскости yz . в) Наложение двух сдвигов.

Как будет показано в § 24, это представление является слишком узким.

В классической кинематике не было попыток определения тензора конечной деформации D_{lm} . Эта задача отличается значительной сложностью и будет обсуждаться в § 29.

4. Некоторые сведения из динамики. Напряжение s_n , где n обозначает направление внешней нормали, можно разложить на нормальную компоненту (растягивающее или сжимающее напряжение)¹⁾ в направлении n

$$\sigma_n = s_{nn} \quad (4.1)$$

и тангенциальную компоненту (касательное напряжение)¹⁾ в направлении t , нормальном к n в плоскости векторов s_n и n ,

$$\tau_n = s_{nt}. \quad (4.2)$$

При этом n не является текущим индексом, а показывает, что s_n — псевдовектор, или вырожденный тензор. По этой причине Сокольников²⁾ обозначает его s^n . Напряжение s_n связано с компонентами тензора напряжений тремя уравнениями

$$s_{nl} = s_{\alpha l} [n \cdot x_\alpha]. \quad (4.3)$$

Приложение первой группы уравнений (2.1) к элементарному параллелепипеду приводит к системе

$$s_{\alpha l, \alpha} + \varrho (B_l - \ddot{x}_l) = 0. \quad (4.4)$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения* (или *уравнениями равновесия*, когда $\ddot{x} = 0$). Для их решения должны быть известны напряжения s_{lm} на поверхности тела, вызванные внешними силами, или *динамические условия на контуре*.

Разлагая тензор напряжений в соответствии с уравнением (3.11), имеем:

$$s_{lm} = \frac{1}{3} s_{\alpha\alpha} \delta_{lm} + s_{lm(0)}, \quad (4.5)$$

где отрицательная изотропная компонента

$$-p_m = \frac{1}{3} s_{\alpha\alpha} \quad (4.6)$$

определяет *среднее давление*, $s_{lm(0)}$ — девиатор напряжений.

¹⁾ Обозначения σ и τ общеприняты в технической литературе.

²⁾ Sokolnikoff I. S., Elasticity, New York—London, McGraw Hill Book Co., 1946.

5. Энергетические соотношения. Внешняя сила P , действуя на тело, производит работу на единицу объема w_P . Удельной мощностью внешних сил является величина \dot{w}_P . Мощность (на единицу объема), вызванная поверхностными силами, равна $(s_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta)_{,\alpha}$. Последняя равна $s_{\alpha\beta} \dot{x}_{\beta,\alpha} + s_{\alpha\beta,\alpha} \dot{x}_\beta$, в то время как мощность (опять на единицу объема), обусловленная объемными силами, будет $\varrho B_\alpha \dot{x}_\alpha$. Заменяя немые индексы, получим:

$$\dot{w}_P = s_{\alpha\beta} \dot{x}_{\beta,\alpha} + (s_{\alpha\beta,\alpha} + \varrho B_\beta) \dot{x}_\beta. \quad (5.1)$$

Из (4.4) вытекает уравнение

$$s_{\alpha l,\alpha} + \varrho B_l = \varrho \ddot{x}_l, \quad (5.2)$$

и

$$\dot{w}_P = s_{\alpha\beta} \dot{x}_{\beta,\alpha} + \varrho \ddot{x}_\alpha \dot{x}_\alpha, \quad (5.3)$$

или, принимая во внимание (3.10), имеем:

$$\dot{w}_P = s_{\alpha\beta} \dot{d}_{\alpha\beta} + \varrho \ddot{x}_\alpha \dot{x}_\alpha. \quad (5.4)$$

Однако e_k — кинетическая энергия, накапливаемая в единице объема тела в единицу времени, — равна

$$\dot{e}_k = \frac{1}{2} \varrho (\dot{x}_\alpha)^2 = \varrho \ddot{x}_\alpha \dot{x}_\alpha. \quad (5.5)$$

Поэтому удельная мощность напряжений \dot{w}_s будет

$$\dot{w}_s = \dot{w}_P - \dot{e}_k = s_{\alpha\beta} \dot{d}_{\alpha\beta}. \quad (5.6)$$

Используя уравнения (3.11) и (4.5), получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_s &= \dot{w}_v + \dot{w}_{(0)}, \\ \dot{w}_v &= \frac{s_{\alpha\alpha}}{3} \cdot \dot{d}_{\beta\beta}, \\ \dot{w}_{(0)} &= s_{\alpha\beta(0)} \dot{d}_{\alpha\beta(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Мощность напряжений, таким образом, представляет собой сумму мощностей, расходуемых на изменение объема и формы тела.

Работа напряжений должна удовлетворять двум законам термодинамики. Для изотермических процессов оба закона записываются в виде соотношений Гиббса — Гельмгольца ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \delta w &= \delta \Phi + \delta \psi, \\ \delta \psi &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

где Φ — плотность свободной внутренней энергии ²⁾ и ψ — плотность связанной энергии. Второе неравенство (5.8) выражает условие, что $\psi = 0$ только при термодинамическом равновесии, в других случаях ψ может только расти. Следовательно, в реологических процессах для любого *реального* материала следует учитывать как Φ , так и ψ ; в классической теории упругости $\psi \equiv 0$, и, следовательно, знак равенства во втором соотношении (5.8) относится к этому идеальному случаю. Принимая во внимание наше определение упругой деформации как обратимой части общей деформации, можно установить, что Φ тождественна работе упругой деформации w_e и представляет собой накопленную часть работы напряжений.

6. Реологический метод и план книги. Реология, как физика деформации, устанавливает взаимосвязь между силами, действующими на материальное тело, и вызванными ими деформациями. Механика устанавливает связь между вектором силы и тензором напряжений в виде уравнений (4.4), которые, как это уже отмечалось в § 2, трижды неопределимы.

Реология решает задачи, *предполагая* для каждого рода материала реологическое уравнение состояния или *реологическое уравнение* связи между тензором напряжений, тензором деформации и их производными по времени ³⁾. Тензор деформации определяется через три компоненты вектора *перемещений* u_i или вектора *скоростей* v_i , причем число неизвестных сокращается с шести до трех. Форма реологического уравнения устанавливается эксперимен-

¹⁾ Weissenberg K., Abh. preuss. Akad. Wiss., 1931, H.2.

²⁾ При вычислении энергии Φ накопленная кинетическая энергия вычитается. В вискозиметрии это достигается введением «поправки на кинетическую энергию».

³⁾ Их производные по координатам не фигурируют в реологических уравнениях.

том; являясь *точной* зависимостью между математическими величинами, оно описывает свойства *идеального* материала, который, таким образом, служит основой для сравнения при анализе поведения реального вещества. Идеальным материалам присвоены имена ученых, которые впервые предложили их уравнения¹⁾.

Реологическое уравнение обычно записывается в форме

$$R(s_{lm}, D_{no}) = 0, \quad (6.1)$$

где D и s означают также производные соответствующих величин по времени, при этом D — конечная или бесконечно малая, упругая или неупругая деформация, l , m , n и o — текущие индексы. Для изотропного материала это соотношение можно представить в виде двух уравнений, одно из которых, R_v , связано с изменением объема, а второе, $R_{(0)}$, — с формоизменением²⁾. Скалярные параметры, фигурирующие в реологических уравнениях, представляют собой реологические «коэффициенты» или «модули», характеризующие реологические свойства материала³⁾. «Евклидово твердое тело» или согласно принятой терминологии абсолютно твердое тело (реологическое уравнение его вырождается в тождество $D_{lm} \equiv 0$) и «жидкость Паскаля» или идеальная жидкость (уравнение которой описывается тождеством $s_{lm(0)} = 0$) реологией не рассматриваются. Эти два тела, в реологических уравнениях которых нет коэффициентов, рассматриваются собственно механикой. Реология охватывает из твердых тел *тело Гука*, из жидкостей — *ньютонову жидкость*. Первое, идеально упругое тело рассматривается в классической теории упругости, второе — «простая» вязкая жидкость — в классической гидродинамике. К ним следует добавить еще *тело Сен-Венана* — твердое тело, обладающее пределом текучести, при напряжениях ниже которого оно деформируется упруго и пластически течет при постоянном напряжении, равном пределу текучести. Тело

¹⁾ Эта терминология была введена Мизесом; см. Proc. 3rd Internat. Congr. Mech. 2, 3 (1930).

²⁾ Этого нельзя сделать, если учитывать изменение объема, обусловленное деформацией сдвига (см. § 29).

³⁾ В классических теориях они рассматриваются как «константы».

Сен-Венана изучает идеальная пластичность. Можно показать, что все другие «реологические тела» могут рассматриваться как комбинации этих трех основных тел. Развивая такую реологическую систематизацию, следует иметь в виду, что *при гидростатическом давлении все материалы, жидкие и твердые, ведут себя с достаточной степенью приближения одинаково*: они являются идеально упругими. Реологические различия особенно ярко проявляются при сдвиге (или в более общем случае при формоизменении). Следовательно, каждый материал обладает двумя реологическими уравнениями — одним для деформации объема, общим для всех тел, и другим для формоизменения, специфичным для каждого тела в отдельности.

Настоящая работа предполагает осветить реологический метод следующим образом. После ознакомления с математическим аппаратом реологии в главе А, II будут описаны классические тела в объеме, достаточном для ознакомления с реологическими телами. В главе В мы осветим макрореологию, ограничиваясь при этом *бесконечно малыми деформациями*. Теория конечных деформаций освещена в «Handbuch der Physik», т. X ¹⁾. Однако, вопреки обычным представлениям, теория бесконечно малых упругих деформаций не ограничивается здесь, как это будет показано далее, эффектами первого порядка. Поэтому глава В разделена на две части: часть В, I, рассматривающую эффекты первого порядка, и часть В, II, рассматривающую эффекты более высоких порядков; к ним добавлена часть В, III, которая имеет дело с пределами, накладываемыми на деформацию прочностью материала. В главе С мы коротко осветим микрореологию. Вследствие значительных математических трудностей теория этого раздела реологии находится пока еще в зачаточном состоянии ²⁾. В главе D дан обзор реометрии. Реометрия решает преимущественно технологические задачи

1) Struktur der Flüssigkeiten, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960. [На русском языке см. Кутилин Д. И., Теория конечных деформаций, Гостехиздат, М., 1947; Новожилов В. В., Теория упругости, Судпромгиз, Л., 1958. (Прим. ред.)]

2) Более детальный обзор дан в книге под редакцией Херманса (1953).

и не получила еще значительного распространения как метод физического исследования. Наконец, в главе Е содержатся отдельные отрывочные сведения, которые принесли бы ущерб стройности изложения, если бы были включены в основной текст.

Мы не включили сюда изложение реологических свойств отдельных материалов, так как это отвлекло бы нас из области физики в область технологии. Читатель может найти такую информацию в книгах, приведенных в разделе «Библиография».

7. Математический аппарат реологии. *а) Физические тензоры.* Физические величины, с которыми реология имеет дело, являются тензорами нулевого ранга (скалярами), первого ранга (векторами) и второго ранга (тензорами в более узком смысле слова) в трехмерном евклидовом пространстве. Эти тензоры могут быть выражены через их физические компоненты ¹⁾, которые связаны с так называемыми «геометрическими» компонентами, применяемыми в геометрии и некоторых разделах физики, соотношениями

$$\left. \begin{aligned} v^{(l)} &= v^l (g_{ll})^{1/2}, \\ t^{(lm)} &= t^{lm} (g_{ll} g_{mm})^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Физические компоненты обозначаются индексами, поднятыми на пол-интервала и заключенными в скобки. Физический вектор образуется из его компонент по правилу параллелограмма; все физические компоненты, в противоположность геометрическим, имеют одну и ту же размерность, а именно размерность векторного поля, к которому они принадлежат. В ортогональных декартовых координатах, где $g_{lm} = \delta_{lm}$, физические компоненты совпадают с геометрическими. В криволинейной ортогональной координатной системе физические компоненты в рассматриваемой точке совпадают с компонентами локальной декартовой

¹⁾ Компоненты физических тензоров были введены Мак-Коннеллом; см. McConnell A. J., *Applications of the absolute differential calculus*, London—Glasgow, Blackie, 1931—1947. Ср. также Ollendorf, *Die Welt der Vektoren*, Wien, Springer-Verlag, 1950 и Truesdell C., *Z. angew. Math. Mech.* 33, № 10/11, 345 (1953); 34, № 1/2, 69 (1954). Эти представления были далее развиты в работах Брауна и Карни.

системы, оси которой параллельны касательным к координатным кривым в данной точке. Для преобразования тензорного уравнения, записанного в общих геометрических компонентах, в уравнение в физических компонентах заменяют смешанные геометрические компоненты физическими ¹⁾ и ковариантные производные — физическими производными, как описано ниже. Преобразование тензорного уравнения, записанного в декартовых компонентах, в уравнение в ортогональных физических компонентах производят по следующей схеме ²⁾:

геометрическая компонента	физическая компонента	
v_m	$v(m)$	}
t_{lm}	$t(lm)$	
φ, l	$\varphi, (l) = (g^{ll})^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x(l)}$	
$v_{l,m}$	$v(l, m) = (g^{mm})^{1/2} \frac{\partial v(l)}{\partial x(m)} + G(l, am) v(a)$	
$t_{lm, n}$	$t(lm, n) = (g^{nn})^{1/2} \frac{\partial t(lm)}{\partial x(n)} + G(l, na)t(am) + G(m, na)t(la)$	

(7.2)

где физические символы Кристоффеля $G(l, mn)$ определяются соотношениями ³⁾

$$G(l, mn) = \frac{1}{2} (g^{ll} g^{mm} g^{nn})^{1/2} \left(\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} \right). \quad (7.3)$$

Физические символы Кристоффеля равны кривизне l -координатной кривой в данной точке. Таким образом, для определения физических символов Кристоффеля в криволинейных координатах должны быть измерены или вычислены радиусы кривизны координатных кривых и найдены величины, им обратные.

¹⁾ Braun I., Bull. Res. Council Israel 1, 127 (1951).

²⁾ Метод развит Брауном (см. предыдущую сноску).

³⁾ Заметим, что физические символы Кристоффеля, в противоположность геометрическим, являются антисимметричными и поэтому индексы l и n нельзя менять местами.

При реологических исследованиях наиболее часто применяются декартовы координаты, весьма часто — ортогональные криволинейные (в особенности цилиндрические или сферические), редко — прямолинейные косоугольные и в исключительных случаях применяются общие криволинейные координаты. Во всех этих случаях используются физические компоненты, поэтому в дальнейшем применяются нижние индексы, а не поднятые на пол-интервала вверх.

Так как *цилиндрические координаты* нашли широкое применение в реологии, выпишем соответствующие уравнения более подробно. Имеем:

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z, \quad (7.4)$$

$$g_{lm} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.5)$$

Отсюда

$$G_{2,21} = -G_{1,22} = \frac{1}{r}, \quad (7.6)$$

а все другие компоненты равны нулю; кроме того,

$$dx_r = dr, \quad dx_\theta = r d\theta, \quad dx_z = dz, \quad (7.7)$$

$$2\omega_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \quad 2\omega_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad 2\omega_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad (7.8)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad d_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ 2d_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}; \quad 2d_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \\ 2d_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Уравнения движения (4.4) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial z} + \frac{(s_{rr} - s_{\theta\theta})}{r} + \varrho (B_r - a_r) &= 0, \\ \frac{\partial s_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial s_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2s_{r\theta}}{r} + \varrho (B_\theta - a_\theta) &= 0, \\ \frac{\partial s_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r} + \varrho (B_z - a_z) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (7.11)$$

β) *Инварианты тензора. Собственные (или главные) значения* тензоров обозначаются $t(i)$, $t(j)$, $t(k)$, где i, j, k — взаимно перпендикулярные главные направления. Главными инвариантами симметричного тензора являются

$$\left. \begin{aligned} I_t &= t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} = t(i) + t(j) + t(k), \\ II_t &= t_{xx}t_{yy} + t_{yy}t_{zz} + t_{zz}t_{xx} - t_{xy}^2 - t_{yz}^2 - t_{zx}^2 = \\ &= t(i)t(j) + t(j)t(k) + t(k)t(i), \\ III_t &= t_{xx}t_{yy}t_{zz} + 2t_{xy}t_{yz}t_{zx} - t_{xx}t_{yz}^2 - \\ &\quad - t_{yy}t_{zx}^2 - t_{zz}t_{xy}^2 = t(i)t(j)t(k). \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Если тензор разложить на изотропную компоненту и девиатор по уравнению

$$t_{lm} = \frac{t_{\alpha\alpha}}{3} \delta_{lm} + t_{lm(0)}, \quad (7.13)$$

то первый инвариант девиатора равен нулю или

$$I_{t(0)} = t_{(0)}(i) + t_{(0)}(j) + t_{(0)}(k) = 0, \quad (7.14)$$

тогда как второй определяется уравнением

$$\begin{aligned} II_{t(0)} &= -\frac{1}{2} [t_{xx(0)}^2 + t_{yy(0)}^2 + t_{zz(0)}^2 + 2t_{xy(0)}^2 + \\ &+ 2t_{yz(0)}^2 + 2t_{zx(0)}^2] = -\frac{1}{2} [t_{(0)}^2(i) + t_{(0)}^2(j) + t_{(0)}^2(k)]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Если девиатор напряжений является двухмерным, т. е. $t_{(0)}(k) = 0$, то из (7.14) получаем

$$t_{(0)}(j) = -t_{(0)}(i) \quad (7.16)$$

и из (7.15)

$$II_{t(0)} = -t_{(0)}^2(i); \quad (7.17)$$

но, как это следует из (7.12),

$$III_{t(0)} = 0. \quad (7.18)$$

γ) *Изотропные тензорные функции.* Как отмечалось в § 6, основой теоретической реологии является реологическое уравнение (6.1), в котором тензор напряжений s определен как функция тензора деформации D . Оба являются симметричными тензорами второго ранга. В соответствии с § 1 мы полагаем, что материалы, к которым применяются различные реологические уравнения, яв-

ляются изотропными или квазиизотропными. Поэтому зависимость, связывающая эти два тензора, является изотропной. Это положение налагает определенные условия, которые являются общими для всех изотропных тензорных функций.

Рассматривая простейший случай, в котором s_{lm} представляет собой явную функцию от D_{no} , и записывая y_{lm} вместо s_{lm} и x_{no} вместо D_{no} , получим уравнение

$$y_{lm} = F(x_{no}), \quad (7.19)$$

правая часть которого может быть выражена как сумма симметричных тензоров второго ранга:

$$y_{lm} = \mathfrak{F}_0 \delta_{lm} + \mathfrak{F}_1 x_{lm} + \mathfrak{F}_2 x_{l\alpha} x_{\alpha m} + \mathfrak{F}_3 x_{l\alpha} x_{\alpha\beta} x_{\beta m} + \dots \quad (7.20)$$

Это уравнение может быть переписано в виде

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{F}_n x^n. \quad (7.21)$$

Вследствие изотропности материала величины \mathfrak{F} должны быть скалярами. В общем случае они могут быть функциями главных инвариантов I_x , II_x , III_x от x , т. е. могут быть представлены в виде степенного ряда

$$\mathfrak{F}_n = \sum_{p,q,r} k_{p,q,r}^{(n)} I^p II^q III^r. \quad (7.22)$$

Уравнение (7.21) может быть преобразовано с помощью тождества Кейли — Гамильтона, которое может быть записано так:

$$x^n = I_x x^{n-1} - II_x x^{n-2} + III_x x^{n-3} \quad (7.23)$$

или

$$x^3 = I_x x^2 - II_x x^1 + III_x x^0. \quad (7.24)$$

Следовательно,

$$x^n = A_n x^2 + B_n x^1 + C_n x^0, \quad (7.25)$$

где A_n , B_n , C_n представляют собой степенные ряды от I_x , II_x , III_x . Таким образом, уравнение (7.21) можно записать в виде

$$y = \mathfrak{F}_0 x^0 + \mathfrak{F}_1 x^1 + \mathfrak{F}_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathfrak{F}_n (A_n x^2 + B_n x^1 + C_n x^0) \quad (7.26)$$

или

$$y = (\mathfrak{F}_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathfrak{F}_n C_n) x^0 + (\mathfrak{F}_1 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathfrak{F}_n B_n) x^1 + (\mathfrak{F}_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathfrak{F}_n A_n) x^2. \quad (7.27)$$

Для компонент тензора получим уравнение Рейнера (Reiner, (1945, 1948)):

$$y_{lm} = F_0 \delta_{lm} + F_1 x_{lm} + F_2 x_{l\alpha} x_{\alpha m}, \quad (7.28)$$

где скаляры F_0, F_1, F_2 являются в общем случае степенными функциями главных инвариантов x_{lm} . Уравнение (7.28) удовлетворяется всегда, а не только в теории упругости или гидродинамике, для которых оно было впервые получено. Таким образом, показано, что самое общее изотропное уравнение, связывающее симметричные тензоры второго ранга, является уравнением второго порядка относительно тензоров и не более. Однако величины F представляют собой степенные ряды, выраженные через инварианты как функции компонент x_{lm} любой степени, и поэтому уравнение (7.28) может быть любой степени относительно компонент тензоров.

Возникает вопрос: каким образом выразить в общем случае величины F через A_n, B_n, C_n и \mathfrak{F} как функции инвариантов I, II, III ? Как показано Ханином и Рейнером¹⁾, соответствующие уравнения записываются следующим образом:

$$A_n = \sum_{a+2b+3c=n-2} (-1)^b \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I^a II^b III^c, \quad (7.29)$$

$$B_n = \sum_{a+2b+3c=n-1} (-1)^b \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I^a II^b III^c, \quad (7.30)$$

$$C_n = \sum_{a+2b+3c=n} (-1)^b \frac{c(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I^a II^b III^c. \quad (7.31)$$

¹⁾ Hanin M., Reiner M., Z. angew. Math. Phys. 7, 377—393 (1956).

Дальнейшим шагом является определение констант k в (7.22). Это может быть выполнено постановкой соответствующего эксперимента, в котором определяются одновременно компоненты величин y и x , где компонента y выражается как функция компонент x . Простейший эксперимент будет являться одномерным относительно x . Пусть $x(i)$, $x(j)$, $x(k)$ — главные значения x ; i , j , k — главные оси. Мы можем положить $x(j) = x(k) = 0$ и

$$I = x(i), \quad II = III = 0. \quad (7.32)$$

В этом случае из уравнений (7.29) — (7.31), когда $b = c = 0$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= x(i)^{n-2}, \\ B_n &= C_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

и

$$\mathfrak{F}_n = \sum_p k_{p,0,0}^{(n)} x(i)^p. \quad (7.34)$$

Так могут быть определены константы $k_{p,0,0}^{(n)}$. Аналогично можно поставить другой эксперимент, в котором

$$x(j) = -x(i), \quad x(k) = 0 \quad (7.35)$$

и

$$I = 0, \quad II = -x(i)^2, \quad III = 0. \quad (7.36)$$

Если $a = c = 0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= (-1)^{n-2} x(i)^{n-2}, \\ B_n &= (-1)^{n-1} x(i)^{n-1}, \\ C_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

и $k_{0,q,0}^{(n)}$ определится уравнением

$$\mathfrak{F}_n = \sum_q k_{0,q,0}^{(n)} [-x(i)]^{2q}. \quad (7.38)$$

В наиболее важном случае \mathfrak{F}_n являются константами, например, K_n . При этом имеем:

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= K_0 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n C_n, \\ F_1 &= K_1 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n B_n, \\ F_2 &= K_2 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n A_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Тогда для первого эксперимента получим уравнения

$$y(i) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n x(i)^n, \quad y(j) = y(k) = K_0 \quad (7.40)$$

и для второго

$$\left. \begin{aligned} y(i) &= K_0 + K_1 x(i) + K_2 x(i)^2, \\ y(j) &= K_0 - K_1 x(i) + K_2 x(i)^2, \\ y(k) &= K_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

В § 29 мы будем иметь возможность использовать эти уравнения.

δ) *Диаграмма Мора*. Симметричный физический тензор может быть изображен в плоской декартовой системе координат с помощью «кругов Мора» следующим образом.

Пусть t_n — вектор, связанный с нормалью n и представляющий собой одну из компонент тензора ¹⁾ t_{lm} . Выберем два других взаимно перпендикулярных направления, t (тангенциальное) и s (перпендикулярное плоскости чертежа), так, что $t_{nc} = 0$. В этом случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} t_{nn} &= t_{(i)} [n \cdot i]^2, \\ t_{nn}^2 + t_{nt}^2 &= \{t_{(i)} [n \cdot i]\}^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

где i (греческая буква йота) заменяет буквы i, j, k соответственно и рассматривается как индекс суммирования. Тензор t_{lm} может быть наглядно представлен в декарто-

¹⁾ Точно так же, как напряжение s_n является компонентой тензора напряжений s_{lm} (ср. § 4).

вых координатах на плоскости в виде *тензорной диаграммы*, как показано на рис. 2, где t_{nn} — абсцисса и t_{nt} — ордината точки T , определяемой углами (n, i) , (n, j) и (n, k) . Криволинейный треугольник между тремя полукругами, соответствующими $[n \cdot i] = 0$, $[n \cdot j] = 0$, $[n \cdot k] = 0$, отображает октант между осями i, j, k . В двухмерном случае, когда, например, $[n \cdot k] = 0$, условия

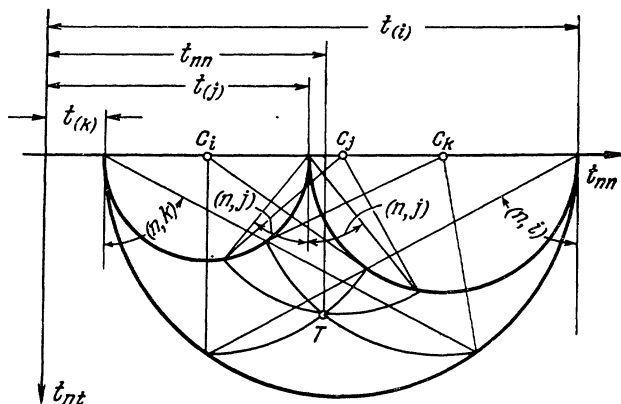


Рис. 2. Круг Мора. Тензорная плоскость. $t(i) > t(j) > t(k)$ — главные значения тензора t_{lm} , а c_i, c_j, c_k — центры кругов Мора.

значительно упрощаются. Диаграмма Мора для двухмерного случая представлена на рис. 3. Для изотропного тензора все три круга Мора вырождаются в точку на оси t_{nn} . Смещение начала координат вдоль оси абсцисс соответствует, таким образом, наложению изотропной компоненты. Рис. 4 иллюстрирует простой прием¹⁾ отыскания точки O , являющейся началом координат диаграммы Мора для девиатора, т. е. для такого тензора, у которого

$$t_{(0)}(i) + t_{(0)}(j) + t_{(0)}(k) = 0. \quad (7.43)$$

е) *Конвективная система координат*. В некоторых случаях бывает удобно использовать систему отсчета,

¹⁾ Предложен Надаи (1931).

Этот метод был предложен Хенки¹⁾ и применялся Олдройдом²⁾, Грином и Церна³⁾. Он называется методом конвективных координат. В настоящей книге этот метод не использовался.

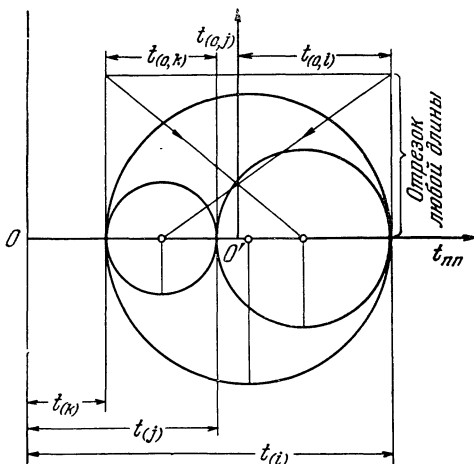


Рис. 4. Отыскание начала круговой диаграммы для девиатора. Точка O — начало круговой диаграммы Мора для тензора с главными осями $t(i) > t(j) > t(k)$. Точка O' — начало системы отсчета, для которой удовлетворяется уравнение (7.43).

8. Реологические свойства. Реологические свойства могут быть двоякого рода.

а) *Существенные реологические свойства* определяют параметры реологических уравнений. Они могут быть (а) *фундаментальными* или (б) *сложными*. Фундаментальными свойствами являются следующие: (1) упругость, (2) вязкость и (3) пластичность (внутреннее трение). Сложные свойства являются комбинацией фундаментальных свойств, как, например, в сложных моделях. Можно себе представить бесчисленное множество таких моделей;

¹⁾ Hencky H., Z. angew. Math. Mech. 5, 144 (1925).

²⁾ Oldroyd J. G., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 200, 523 (1950).

³⁾ Green A. E., Zerna W., Theoretical Elasticity, Oxford, Clarendon Press, 1954.

на практике, однако, используется ограниченное их количество. Для некоторых из них появились специальные термины, как, например, запаздывающая упругость или псевдовязкость, вязко-упругость¹⁾, динамическая пластичность, неупругость и другие. Некоторые свойства, описываемые терминами: преддействие, последствие, запаздывание, релаксация и т. д., не являются независимыми, а *получены* комбинацией фундаментальных свойств. Для описания более сложных свойств терминов уже не хватает, поэтому мы будем пользоваться терминологией, изложенной в § 6, называя материал, например, телом Бюргерса и т. д. Целесообразно избегать употребления каких-либо специальных терминов для описания существенных реологических свойств и пользоваться терминологией, применяемой к идеальным телам. При этом можно, например, говорить о различной упругости, такой, как у тел Гука, Кельвина, Максвелла и др. Много путаницы вносит, например, термин вязко-упругость²⁾.

К трем фундаментальным свойствам, упомянутым выше, следует добавить еще четвертое (4) — прочность.

β) *Технологические свойства*. Для измерения технологических свойств разработаны специальные методы, но теоретические исследования еще не достигли той ступени, на которой было бы показано, что рассматриваемое свойство является фундаментальным или может быть выражено комбинацией известных фундаментальных свойств. Результатом измерения является некоторый «индекс»; последний имеет относительное значение или служит просто для сравнения. Примерами таких свойств являются «пенетрация», «ковкость», «клейкость», «тиксотропия». Некоторые из технологических свойств еще не могут быть измерены с помощью какого-либо прибора. Они коротко упомянуты в § 46. Не измеряются, например, такие свойства, как «впитывание», «кроющая способность красителя» и другие.

1) Автор различает, однако, упруго-вязкость и вязко-упругость. В дальнейшем эти понятия будем считать идентичными. (Прим. ред.)

2) Джеффрис (1952, стр. 10) отмечает, например, что некоторые физиологи и инженеры неправильно употребляют этот термин.

II. Классические тела

9. Уравнение для объемных деформаций. В первом приближении можно считать, что *реологическое уравнение для объемных деформаций* пригодно для всех материалов и имеет вид

$$-p = \kappa \varepsilon_v, \quad (9.1)$$

где p — гидростатическое или статическое в термодинамическом смысле давление и κ — *объемный модуль упругости*. Последний имеет размерность напряжений и измеряется в барах ($1 \text{ бар} = 1 \text{ дин}\cdot\text{см}^{-2}$). Значения κ для некоторых материалов приведены в таблице 1¹⁾.

Таблица 1

Объемные модули упругости κ

Материал	Эфир	Этиловый спирт	Вода	Туф	Глина	Бетон	Стекло	Ртуть	Железо	Сталь	Несжимаемое тело
κ в 10^{11} бар	0,08	0,1	0,2	0,5	1	2	4	5,4	15	18	∞

В классической механике сплошных сред величина p тождественна p_m . Второе уравнение (5.7) приводится при этом к виду

$$\dot{w}_v = \kappa \dot{\varepsilon}_v \dot{\varepsilon}_v \quad (9.2)$$

и после интегрирования

$$w_v = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_v^2 = \frac{1}{2} p^2 / \kappa, \quad (9.3)$$

причем величина w_v представляет собой работу и в случае замкнутого цикла равна нулю. Эта плотность энергии называется *работой упругой деформации*. В соответствии со сказанным в § 7, вся работа деформации объема является,

¹⁾ Таблицы 1—3 дают только порядок величин модуля и вязкости.

в первом приближении, работой упругой деформации. Для евклидова тела и для «несжимаемых» материалов $\epsilon_v = 0$ и $\kappa = \infty$. В этом случае p может быть определено из условий на контуре.

10. Твердое тело Гука. Реологическое уравнение ¹⁾ твердого тела Гука записывается в форме

$$s_{lm(0)} = 2\mu\epsilon_{lm(0)}, \quad (10.1)$$

где μ — *модуль сдвига*, или *модуль упругости второго рода*.

Некоторые значения μ приведены в таблице 2. Уравнение (10.1) выражает закон Гука о пропорциональности напряжений и упругих деформаций. Принимая во внимание выражения (4.5), (3.13), (4.6), мы можем записать зависимость суммарного напряжения от суммарной деформации в виде линейного соотношения:

$$s_{lm} = \lambda\epsilon_{\alpha\alpha}\delta_{lm} + 2\mu\epsilon_{lm}, \quad (10.2)$$

где

$$\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu \quad (10.3)$$

есть константа Ляме.

Решив уравнение (10.2) относительно ϵ_{lm} , получим линейную зависимость

$$\epsilon_{lm} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} s_{\alpha\alpha}\delta_{lm} + s_{lm}/2\mu. \quad (10.4)$$

Таблица 2

Модули сдвига μ

Материал	Шелк	Свинец	Олово	Стекло	Алюминий, кварц, серебро	Цинк, медь	Сварочное железо, платина	Никель, сталь
μ в 10^{11} бар	0,1	0,2	1,5	2	3	4	7	8

¹⁾ В этом случае и во всех последующих мы имеем в виду уравнения для формоизменения.

В отличие от констант Ляме, модули κ и μ имеют физический смысл ¹⁾.

При простом растяжении, когда $s_{lm} = \sigma_{(i)}$, а $\sigma_{(j)} = \sigma_{(k)} = 0$ и, следовательно, $s_{\alpha\alpha} = \sigma_{(i)}$, имеем из (10.4)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{(i)} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{(i)} = \frac{\sigma_{(i)}}{E}, \\ \varepsilon_{(j)} = \varepsilon_{(k)} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{(i)} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_{(i)} = \nu \varepsilon_{(i)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

где

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \frac{9\kappa\mu}{3\kappa + \mu} \quad (10.6)$$

представляет собой *модуль Юнга*, а

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3\kappa - 2\mu}{6\kappa + 2\mu} \quad (10.7)$$

— *коэффициент Пуассона*.

Для несжимаемого материала $\kappa = \infty$, $E^* = 3\mu$, $\nu^* = \frac{1}{2}$.

Если $\mu = \infty$, то тело Гука вырождается в тело Евклида. Все модули κ , μ , E и λ имеют размерность силы, деленной на площадь; ν — безразмерная величина. Для пробки и губчатой резины коэффициент Пуассона близок к нулю.

Заменив напряжения согласно (10.2) в уравнениях движения (4.4), получим *уравнения Ляме*:

$$\mu u_{l, \alpha\alpha} + (\lambda + \mu) u_{\alpha, \alpha l} + \varrho (B_l - \ddot{x}_l) = 0. \quad (10.8)$$

Подставив вместо $s_{lm(0)}$ его значение из (10.1) в третье уравнение (5.7), получим:

$$\dot{w}_{(0)} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta(0)} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta(0)}, \quad (10.9)$$

и после интегрирования имеем:

$$w_{(0)} = \mu \varepsilon_{\alpha\beta(0)} \varepsilon_{\alpha\beta(0)} = \frac{s_{\alpha\beta(0)} \cdot s_{\alpha\beta(0)}}{4\mu}. \quad (10.10)$$

Энергия упругой деформации является свободной энергией и может быть без потерь превращена в работу.

¹⁾ См. Meixner J., Z. Physik 130, 30—43 (1954).

Поэтому мы можем получить реологическое уравнение для тела Гука, предположив существование энергетической функции *упругой деформации* ϕ и полагая $\psi = 0$.

Так как при упругом деформировании элементы тела испытывают вращение, то *относительные перемещения* частиц тела Гука могут быть в общем случае конечными и, если тело имеет «несплошную структуру», весьма значительными. Примером таких больших относительных перемещений, происходящих при малых деформациях, является деформация спиральной пружины (например, в пружинных весах). Если мы не знаем внутреннего строения тела, то можем ошибочно заключить, что большие относительные перемещения происходят при конечных деформациях. В первых попытках объяснить большую деформируемость резины ей приписывали несплошную внутреннюю структуру. Позднее было показано, что это объяснение является неправильным (см. § 27). Однако для некоторых других материалов такие представления оправданы, например для пористого битума.

Относительное удлинение $\epsilon_{(i)}$, согласно (10.5), бывает при деформировании такого тела велико, а E мало, и, рассматривая тело в целом, мы получим случай конечных деформаций. Однако если принимать во внимание строение тела, то обнаружится, что деформации являются весьма малыми и по этой причине для данного случая применим закон Гука в его простейшей форме. С этой точки зрения деформации, которые мы здесь обсуждаем, являются «псевдоконечными». Если растянуть спиральную пружину до ее полной вытяжки, то закон Гука перестанет удовлетворяться. Так же обстоит дело и с материалами, обладающими пористой структурой.

11. Ньютонова жидкость. Реологическое уравнение ньютоновой жидкости имеет вид ¹⁾

$$s_{lm(0)} = 2\eta f_{lm}, \quad (11.1)$$

где η — коэффициент (сдвиговой) вязкости. Он имеет размерность напряжения, помноженного на время, и измеряется в пуазах ($1 \text{ пз} = 1 \text{ дин} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}$). Некоторые значения η при 25° С приведены в таблице 3. Иногда более

¹⁾ Принимая во внимание уравнение (3.15).

Таблица 3

Коэффициенты вязкости при 25° С

Материал	Идеальная жидкость	Толуол	Вода	Этиловый спирт	Ртуть	Молоко	Раствор са- хара в воде 60% концен- трации	Оливковое масло	Касторовое масло
η в с-пэ	0	0,6	1	1,2	1,6	2	57	100	1000

целесообразно использовать коэффициент текучести $\varphi = 1/\eta$.

Уравнение (11.1) описывает закон Ньютона о том, что «сопротивление ($s_{lm(0)}$), возникающее из-за недостаточной скользкости частиц жидкости, ... пропорционально (градиенту) скорости, с которой частицы... разделяются (f_{lm})». Следует подчеркнуть аналогию между уравнениями (11.1) и (10.1). Эта аналогия позволяет сводить задачи упругости к соответствующим задачам ламинарного вязкого течения (или установившейся ползучести) путем замены $f_{lm} = \dot{\epsilon}_{lm}$ на ϵ_{lm} и η на μ .

Реологическое уравнение для суммарного напряжения имеет вид

$$s_{lm} = \kappa \epsilon_v \delta_{lm} + 2\eta f_{lm}. \quad (11.2)$$

Для несжимаемой жидкости величина ϵ_v исчезает, $\kappa = \infty$ и первый член правой части уравнения (11.2) становится неопределенным. Можно записать уравнение (11.2) следующим образом:

$$s_{lm} = -p\delta_{lm} + 2\eta \dot{d}_{lm(0)}, \quad (11.3)$$

и найти величину p из динамических граничных условий задачи. Для очень вязких материалов, например битума, вязкость может определяться по растяжению призматического стержня под действием постоянного напряжения, например σ (i). Следовательно, коэффициент вязкости при растяжении λ_T может быть определен по Трутону¹⁾

¹⁾ Trouton F., Proc. Phys. Soc. Lond. 19, 47 (1905); Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 77, 326 (1906).

из уравнения

$$\sigma(i) = \lambda_T f(i). \quad (11.4)$$

Коэффициент λ_T является вязким аналогом модуля Юнга E . Полагая $f_{\alpha\alpha} = 0$ (см. уравнение (3.15)), получаем:

$$\lambda_T^* = 3\eta. \quad (11.5)$$

Подставляя (11.2) в (4.4) и принимая во внимание (3.10), получаем уравнения Навье — Стокса:

$$p_{,i} = \eta v_{i,\alpha\alpha} + (\eta \dot{\epsilon}_v)_{,i}/3 + \varrho (B_i - \ddot{x}_i), \quad (11.6)$$

являющиеся основой классической гидродинамики вязкой жидкости (здесь $\dot{\epsilon}_v = \dot{d}_v$). Подставляя $s_{lm(0)}$ из (11.1) в третье уравнение (5.7) и принимая во внимание (3.10), получаем:

$$\dot{w} = 2\eta f_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}. \quad (11.7)$$

В то время как работа, затраченная на объемную деформацию вязкой жидкости, полностью превращается в потенциальную энергию в соответствии с уравнением (9.3), энергия формоизменения непрерывно и полностью рассеивается. Мы можем получить реологическое уравнение ньютоновой жидкости, постулируя существование функции рассеяния ψ и полагая $\Phi = 0$ ¹⁾.

12. Тела Сен-Венана и Прандтля. Для тела Сен-Венана установлен постулат, согласно которому оно до некоторого предела $\vartheta_{lm(0)}$ — *предела текучести* — является абсолютно твердым. Когда напряжение

$$s_{lm(0)} = \vartheta_{lm(0)}, \quad (12.1)$$

то материал пластически течет. Предполагается, что при пластическом течении главные направления скорости деформации совпадают с главными осями напряжений. По аналогии с (11.1) Леви²⁾ предположил

$$s_{lm(0)} = \vartheta_{lm(0)} = \frac{2\dot{D}_{lm(0)}}{\lambda_M}, \quad (12.2)$$

¹⁾ Как уже отмечалось выше, это относится только к работе девиатора напряжений.

²⁾ Lévy M., C. R. Acad. Sci. Paris 70, 1323—1325 (1870).

где λ_M не является константой материала, а представляет собой коэффициент пропорциональности¹⁾, который может меняться во времени и в пространстве. При изменении λ_M величина $s_{lm(0)}$ сохраняет постоянное значение.

Если предположить, что тело подчиняется закону Гука при напряжениях ниже предела текучести и полная деформация является суммой упругой и пластической деформации, получим *тело Прандтля*, для которого

$$2\dot{\overline{D}}_{lm(0)} = \frac{\dot{s}_{lm(0)}}{\mu} + \lambda_M s_{lm(0)}. \quad (12.3)$$

Это уравнение вырождается в (12.2) для $\mu = \infty$. *Предельная упругая деформация*, или деформация, соответствующая пределу текучести, которая для тела Сен-Венана равна нулю, для тела Прандтля определится уравнением

$$2\Theta_{lm(0)} = \frac{\vartheta_{lm(0)}}{\mu}. \quad (12.4)$$

Таким образом, на диаграмме деформирования точка, характеризующая границу упругого участка, определяется пределом текучести и предельной упругой деформацией²⁾.

Работа, производимая напряжениями вплоть до предела текучести, накапливается в теле в виде энергии упругой деформации и возвращается без потерь при разгрузке. Работа напряжений сверх предельного значения энергии упругой деформации рассеивается в теле вследствие *внутреннего трения*³⁾. У некоторых материалов (например, у мягких сталей) обнаруживается аналогия с двумя разновидностями трения — статическим и кинетическим, определяющими существование «верхнего» и «нижнего» пределов текучести.

¹⁾ Мы применяем индекс M в λ_M в честь Мизеса (R. Mises).

²⁾ Реологическое уравнение (12.3) послужило Хиллу отправной точкой для его исследований (см. Hill R. H., *Plasticity*, Oxford, Clarendon Press, 1950). [Русский перевод: Хилл Р., *Математическая теория пластичности*, Гостехиздат, М., 1956. (*Прим. ред.*)] Хилл вместо λ_M вводил в уравнение (12.3) $d\lambda$ и использовал приращение деформации вместо скоростей деформации. В качестве приращения деформации он рассматривал величину $d(d_{l,m}) = [(du)_{l,m} + (du)_{m,l}]/2$; ср. формулу (3.8).

³⁾ Вязкость иногда (ошибочно) называют внутренним трением.

Классическая теория пластичности применяется для металлов к двум совершенно различным областям: 1) к расчету элементов сооружений и деталей машин, где возможны только ничтожные пластические деформации, 2) к процессам технологической обработки, например к прокатке, волочению и выдавливанию, где они могут быть очень большими. В первом случае область пластических деформаций ограничена смежной упругой областью, а потому носит название *ограниченной пластической деформации*. При дальнейшем росте нагрузки наступает *неограниченное пластическое течение*. Для первого случая применима теория Прандтля, для второго — теория Сен-Венана — Леви ¹⁾.

¹⁾ См. Prager W., Hodge P. G., Perfectly elastic solids, New York a. London, 1951. Теория Прандтля известна еще как теория Прандтля — Рейсса. [Русский перевод: Прагер В., Ходж Ф., Теория идеально пластического тела, ИЛ, М., 1956. (Прим. ред.)]

В. МАКРОРЕОЛОГИЯ

І. Явления первого порядка

13. Реологическое дерево. Совокупность существенных реологических свойств может быть изображена как иерархическая лестница или родословное дерево, составленное из идеальных тел. Из них три тела, рассматриваемые в классической механике сплошных сред, а именно: твердое тело Гука (обозначаемое символом H), пластическое тело Сен-Венана (символ StV) и ньютонова жидкость (символ N), могут рассматриваться как простые; сложные тела могут быть получены путем соответствующих комбинаций простых.

Как отмечалось в § 1, большую помощь при отыскании из экспериментальных данных реологического уравнения сложного тела оказывает построение механической модели, свойства которой, пусть даже приближенно, отражают поведение реального материала и описываются в виде зависимости силы от удлинения. Заменяя силу на напряжение, а удлинение на деформацию, мы, как это будет видно из дальнейшего изложения, легко получим реологическое уравнение.

Простые тела, определяющие три фундаментальных свойства: упругость, пластичность и вязкость, удобно представить с помощью следующих механических моделей:

(i) Спиральная пружина, изображенная на рис. 5, представляет собой подходящую модель для H -тела. Как отмечалось в § 9, ее удлинение Δl определяется законом Гука:

$$\Delta l = \frac{P}{(E)}, \quad (13.1)$$

где (E) — упругая жесткость пружины.

(ii) Жидкостный элемент, состоящий из цилиндра, наполненного вязким маслом, в который с некоторым

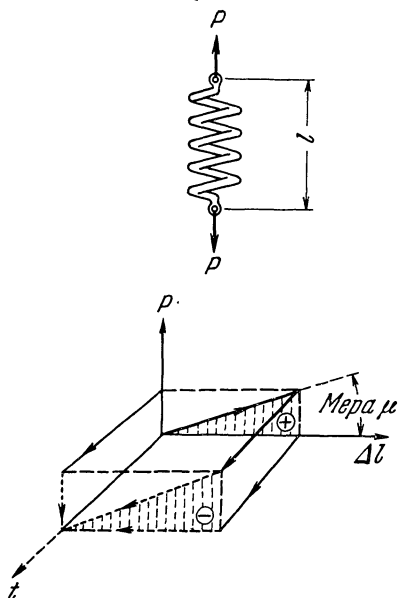


Рис. 5. Схема модели твердого тела Гука (H -тела). Знак $+$ относится к накопленной энергии, а знак $-$ к возвращенной энергии.

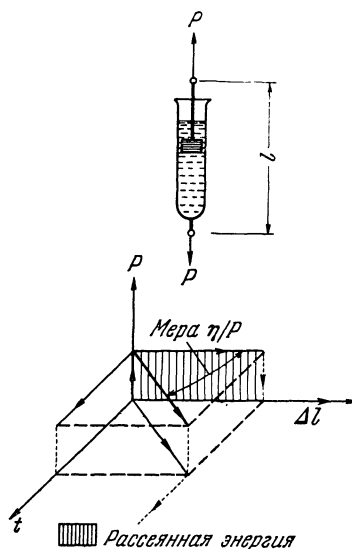


Рис. 6. Схема модели тела Ньютона (N -тела).

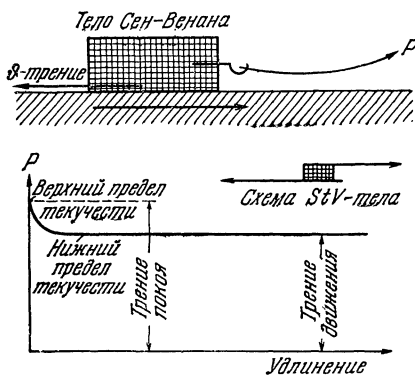


Рис. 7. Модель тела Сен-Венана (StV -тела).

зазором вставлен поршень, моделирует N -тело, описываемое уравнением

$$\dot{\Delta l} = \frac{P}{(\eta)}. \quad (13.2)$$

Качественная картина поведения N -тела представлена на рис. 6.

(iii) Элемент сухого трения, который представляет собой груз, покоящийся на столе, как показано на рис. 7, является удобной моделью для описания поведения StV -тела, уравнение которого

$$P = (\vartheta). \quad (13.3)$$

Эти три элемента могут соединяться между собой параллельно (\parallel) или последовательно ($—$). При параллельном

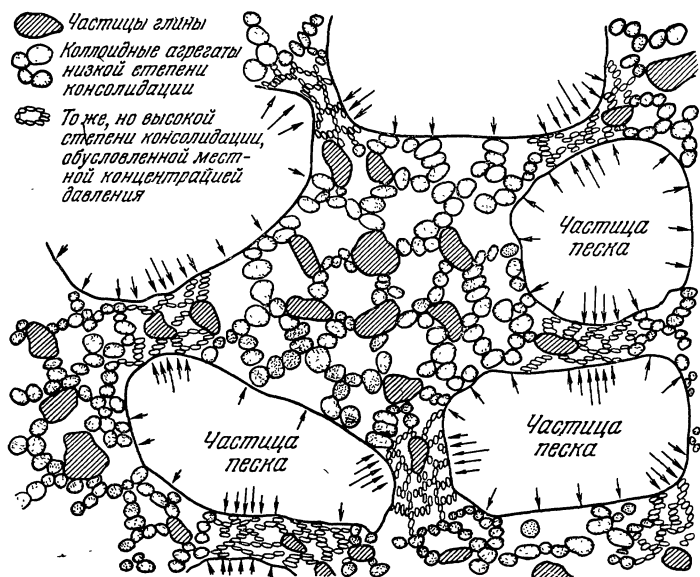


Рис. 8. Структура суглинка.

соединении полная нагрузка на тело складывается из нагрузок, передаваемых отдельными элементами, а скорости удлинения элементов одинаковы. При последовательном соединении полная скорость удлинения равна

сумме скоростей составляющих элементов, причем каждый из них передает полную нагрузку. Модель работает на простое растяжение, однако она может описывать не только удлинение, но и сдвиг (или формоизменение в общем случае) и всестороннее растяжение (сжатие).

В качестве примера рассмотрим задачу установления реологического уравнения для описания деформационного поведения материала, изображенного на рис. 8. Рисунок представляет собой попе-

речный разрез образца суглинка, увеличенного примерно в 10^4 раз. Частицы песка соединяются цепочками коллоидных частиц глины, а промежутки заполнены водой. Система в целом имеет структуру геля. Для описания материала пригодна нижеследующая картина, развитая Кельвином [Kelvin (1875)]: «Рассмотрим идеально упругое пористое тело либо с соединениями между порами, как у губки, либо с отдельными включениями пор в упругом теле. Вообразим эти поры и промежутки заполненными вязкой жидкостью, такой, как масло. Статические испытания такого тела покажут идеальную упругость по отношению к объемным и сдвиговым деформациям; динамические эксперименты обнаружат потери энер-

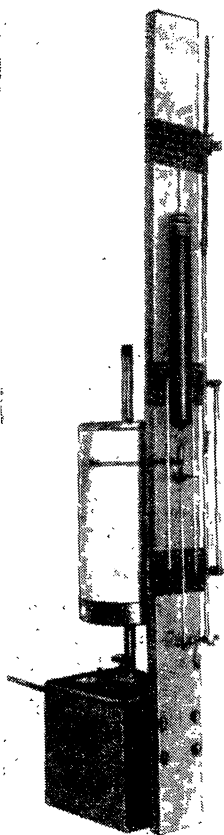


Рис. 9. Механическая модель тела Кельвина (К-тела). Стальная витая пружина (справа) и пробирка, наполненная вязкой жидкостью (слева), действующая как жидкостный элемент, соединены параллельно. Кривая зависимости деформаций от времени записывается автоматически.

гии, что в действительности обнаруживает вибратор из упругого однородного твердого тела... В соответствии с законом вязкости Стокса¹⁾ наш воображаемый пористый вибратор подчинялся бы закону затухания обычного вибратора, проявляющего сопротивление, прямо пропорциональное скорости его движения».

Механическая модель, воспроизводящая реологическое поведение тела, описанного Кельвином, представлена на рис. 9. Графически оно изображено на рис. 10. Из уравнений (13.1) и (13.2) получаем:

$$P_K = P_H + P_N = (E) \Delta l + (\eta) \dot{\Delta l}. \quad (13.4)$$

Символически тело Кельвина может быть представлено реологической формулой

$$K = H | N. \quad (13.5)$$

Подобно (13.4) получаем из уравнений (10.1) и (11.1)

$$s_{lm}(0) = 2\mu \epsilon_{lm}(0) + 2\eta_s \dot{\epsilon}_{lm}(0), \quad (13.6)$$

где индекс s в η_s означает вязкость твердого тела²⁾ по причинам, изложенным в § 15.

По такой аналогии можно построить «дерево» реологических тел. Для краткости будем писать s вместо $s_{lm}(0)$ и ϵ , f вместо $\epsilon_{lm}(0)$ и $f_{lm}(0)$.

В таблице 4 представлена система реологических тел, построенная в соответствии с числом фундаментальных структурных элементов, образующих тело. Последовательное соединение обозначено в таблице одинарной линией, параллельное — двойной. Некоторые возможные комбинации построены на основе теоретических соображений, другие вытекали из опытных данных. К числу их, кроме упомянутого K -тела, относятся следующие:

$M = N - H$, названное по имени Максвелла (1868);

$B = H - (StV | N)$, названное по имени Бингама³⁾;

¹⁾ Это относится к уравнению (11.6).

²⁾ От англ. слова «solid» — «твердое тело». (Прим. ред.)

³⁾ Bingham E. C., Green H. (1919).

$J = N|M$ — по имени Джеффриса (1929); эта модель эквивалентна модели $L = K - N$, предложенной Лесерсичем ¹⁾;

$Schw = H - (StV|M)$ — по имени Шведова ²⁾;

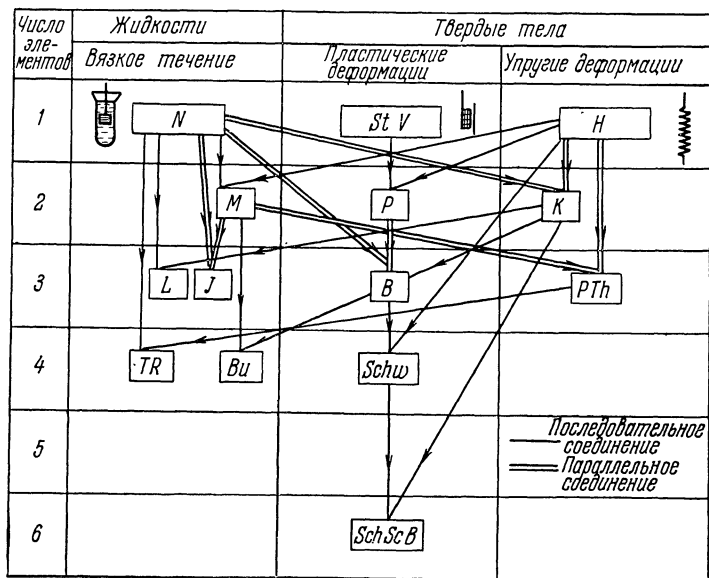
$PTh = H|M$ — по имени Пойнтинга и Томсона (1902);

$Bu = M - K$ — по имени Бургерса ³⁾; эта модель эквивалентна модели $TR = N - PTh$, предложенной Трутоном и Ренкином ⁴⁾;

$SchScB = Schw - K$ — по имени Шофилда и Скотт-Блера ⁵⁾.

Таблица 4

Древо реологических тел



¹⁾ Lethersich W., J. Soc. Chem. Ind. **61**, 101 (1942).

²⁾ Schwedoff T., J. de Phys. (2) **9**, 34 (1890); Rapp. pres. congr. internat. phys. **1**, 478 (1900).

³⁾ Burgers J. M., First report on viscosity and plasticity, Amsterdam, Nordemann Publ., 1935.

⁴⁾ Trouton F., Rankine, Phil. Mag. (6) **8**, 555 (1904).

⁵⁾ Schofield R. K., Scott Blair G. W., Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **138**, 707 (1932); **139**, 557 (1933); **141**, 72 (1933); **160**, 87 (1937).

Возможны и другие комбинации, которые могут быть установлены в будущем в результате реологических исследований материалов, изученных пока еще недостаточно.

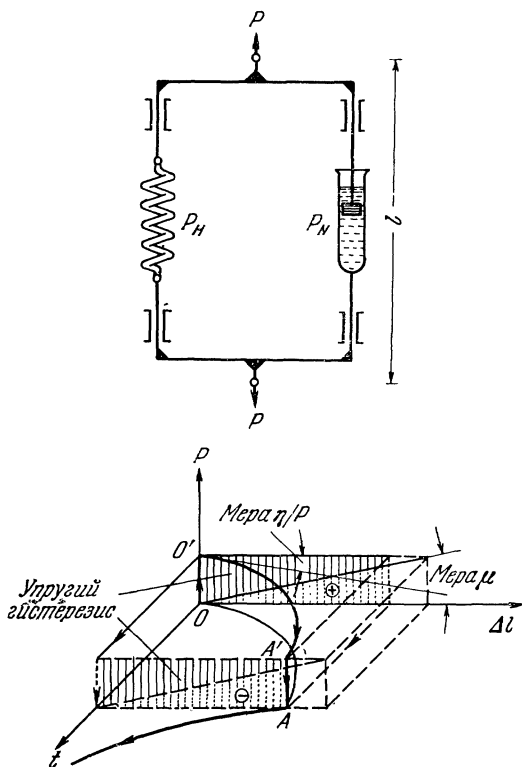


Рис. 10. Схема модели тела Кельвина (K -тела) $K=H/N$. На плоскости $\Delta l, t$ представлены кривые упругого последствия при нагрузке и разгрузке в соответствии с диаграммой нагрузки, показанной на плоскости P, t . Знак \oplus относится к накопленной энергии, а знак \ominus соответствует возвращенной энергии.

Однако можно считать аксиомой реологии положение о том, что любой реальный материал обладает всеми реологическими свойствами, выраженными в разной степени.

Как уже отмечалось выше, в разделе 1, материалы, являющиеся объектами реологических исследований, представляют большей частью дисперсные системы, состоящие из твердой и жидкой фаз. В такой твердо-жидкой системе H -элемент представляет твердую и N -элемент — жидкую фазу. Например, материал в переходном состоянии от золя к гелю, у которого «зерна» геля, окруженные пленками жидкости, взвешены в жидкой фазе, может быть представлен структурной формулой $(H|N) - N$. Кельвин (как было показано выше), объясняя существование вязкости у твердых тел, имел в виду гели; однако Фойгт¹⁾ ввел это же понятие для однородных однофазных материалов. Термин «тело Фойгта» иногда применяется к модели, изображенной на рис. 10. Здесь мы имеем дело со случаем, где ярко проявляется символический характер моделей. Последние не должны пониматься нами буквально²⁾. Механизм, развитый Максвеллом для описания явления релаксации и положенный в основу M -тела, скорее относится к однородным однофазным системам. Описание поведения тел с помощью моделей терпит неудачу, если упругие или вязкие свойства вещества являются нелинейными. Однако даже и в этом случае механические модели не теряют своего эвристического значения.

14. Вязко-пластическое или бингамово тело. Основы реологии заложили Бингам³⁾ и Грин, изучившие концентрированные суспензии глины⁴⁾ и масляные краски (Bingham, Green (1919)). В качестве вступления к изложению реологических методов полезно более подробно разобрать работу Бингама и Грина, обосновывающую необходимость отступления от классической гидро-

¹⁾ Voigt, Abh. Ges. Wiss. Göttingen 36 (1890); Ann. d. Phys. 47, 671 (1892). Приоритет этого понятия принадлежит, однако, Кельвину.

²⁾ См. по этому поводу дискуссионную статью Roscoe-Reiner, Brit. J. Appl. Phys. 1, 332 (1950).

³⁾ Здесь следует отметить, что работы профессора Одесского университета Ф. Н. Шведова, изучившего релаксационные процессы у коллоидных растворов желатины (см. сноску 2 на стр. 46), были выполнены значительно ранее (1890). Тело Бингама, как это следует из сравнения рис. 11 и 23, является вырожденным телом Шведова. (Прим. ред.)

⁴⁾ Bingham E. C., U. S. Bur. Stand. Bull. 13, 309 (1916).

динамики и положившую начало реологии как новому разделу физики.

Масляная краска содержит в своем составе в качестве растворителя масло, в котором взвешены частицы красителя. Масла, используемые для приготовления красок, являются простыми ньютоновыми жидкостями. Естественно было бы предположить, что краска, подобно ее главной компоненте (маслу), является жидкостью и что можно определять вязкость краски как ньютоновой жидкости. Необходимо, чтобы нанесение краски на окрашиваемую поверхность осуществлялось без значительного усилия; кроме того, краска должна обладать некоторой текучестью, чтобы после окрашивания не оставалось следов кисти. Технологи по краскам пытались связать способность краски наноситься на окрашиваемую поверхность и стекать с нее с вязкостью красителя. Чем больше текучесть, тем легче краска наносится на покрываемую поверхность и тем лучше исчезают следы от кисти; в связи с этим можно предположить, что реологические свойства красок могут быть достаточно полно описаны с помощью параметра η .

От краски, однако, требуется наличие некоторого третьего реологического свойства. Будучи нанесена на вертикальную поверхность, она не должна стекать. Это требование находится, по-видимому, в противоречии с двумя вышеупомянутыми. С одной стороны, краска должна иметь низкую вязкость, чтобы удовлетворять первым двум требованиям, и, с другой стороны, высокую вязкость, чтобы удовлетворить третьему требованию. Таким образом, при вискозиметрических измерениях краски с различными скоростями течения «вязкость» не должна быть постоянной. Наконец, Бингам и Грин нашли решение задачи, как это видно из заглавия их статьи, в следующем: «краска — пластический материал, а не вязкая жидкость». Они ввели понятие о так называемой вязко-пластической модели, именуемой в настоящее время *телом Бингама*.

Последнее представляет собой идеализированное пластическое твердое тело, сопротивляющееся пластической деформации не только за счет своего предела текучести (θ), как в случае тел Сен-Венана и Прандтля, но также и за счет вязкости, называемой *пластической вязкостью*

(η_{pl}). Его реологическая формула имеет вид

$$B = H - (N | StV) \quad (14.1)$$

и изображается на рис. 11. Складывая силы, находим из (13.2) и (13.3) уравнение, описывающее механизм пластической деформации:

$$P_B = P_N + P_{StV} = \eta_{pl} \dot{\Delta l} + \vartheta. \quad (14.2)$$

Заменив силы и удлинения напряжениями и деформациями, получим ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} s &= 2\mu\varepsilon \quad \text{при } |s| < |\vartheta|, \\ s - \vartheta &= 2\eta_{pl}\dot{d} \quad \text{при } |s| \geq |\vartheta|. \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

На пределе текучести

$$\dot{d} = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad s = \vartheta = 2\mu\Theta, \quad (14.3,1)$$

где Θ — предельная упругая деформация и ϑ — предел текучести.

Два параметра тела Бингама лучше всего определять с помощью одного из двух типов пластометров, прототипами которых являются капиллярный и ротационный вискозиметры.

а) *Метод капиллярного пластометра.* В капиллярном приборе материал под действием градиента давления $\Delta p/l$ протекает по цилиндрической трубке радиуса R и длины l .

Скорость течения материала в цилиндрических координатах $v_z = f(r)$, причем $v_r = v_\theta = 0$. Из соотношений (7.9) после замены u на v и d на \dot{d} находим, что все компоненты тензора скоростей деформации, кроме

$$2\dot{d}_{zr} = \frac{dv}{dr} = f'(r), \quad (14.4)$$

равны нулю.

Из (14.3) имеем:

$$\tau_{zr} = \vartheta_t + \eta_{pl} f'(r), \quad (14.5)$$

¹⁾ См. Oldroyd J. G., Proc. Cambridge Phil. Soc. 43, 100 (1947).

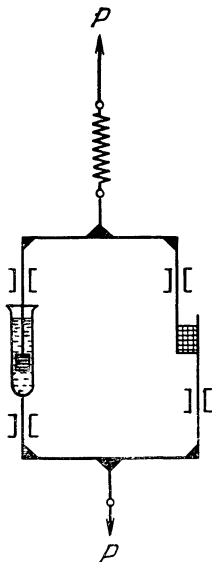


Рис. 11. Схема модели тела Бингама (B -тела) $B = H - (N | StV)$.

где ϑ_t представляет собой тангенциальную компоненту предела текучести. Для вычисления суммарного напряжения мы должны добавить еще изотропную компоненту $-p\delta_{im}$. При отсутствии объемных сил ($q = 0$) первое из уравнений движения (7.10) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \Theta} = 0, \quad (14.6)$$

тогда как третье дает

$$\eta_{pl} [rf''(r) + f'(r)] + \vartheta_t = r \frac{\partial p}{\partial z} = r \frac{\Delta p}{l}. \quad (14.7)$$

Интегрируя дважды по r и вводя снова v вместо $f(r)$, получим

$$\eta_{pl}v + r\vartheta_t = \frac{r^2}{4} \frac{\Delta p}{l} + C_1 \ln r + C_2. \quad (14.8)$$

Так как v должна быть конечной при $r = 0$ и любом ϑ , $C_1 = 0$. Для определения C_2 используем граничное условие, состоящее в том, что $v = 0$ для $r = R$, так как жидкость прилипает к стенке. Отсюда находим:

$$\eta_{pl}v = \frac{(R^2 - r^2) \Delta p}{4l} - \vartheta (R - r). \quad (14.9)$$

В соответствии со вторым уравнением (14.3) эта формула действительна только в зоне течения, т. е. там, где касательное напряжение

$$\tau = r \frac{\Delta p}{2l} \quad (14.10)$$

равно или превышает предел текучести ϑ . Для $\tau = \vartheta$ имеем:

$$r = r_0 = \frac{2l\vartheta}{\Delta p}. \quad (14.11)$$

Для всех $r < r_0$ имеем $\tau < \vartheta$, и в этой области, следовательно, материал не течет, а движется как сплошное твердое тело (рис. 12). Напряжения в ядре течения вызывают упругие деформации. Из уравнения (14.9) находим количество материала Q , которое протекает через трубу за время t :

$$\frac{Q}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta_{pl} l} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{2l\vartheta}{R \Delta p} + \frac{1}{3} \left(\frac{2l\vartheta}{R \Delta p} \right)^4 \right]. \quad (14.12)$$

Это уравнение Букингама — Рейнера. При $\vartheta = 0$ оно переходит в уравнение Гагена — Пуазейля для ньютоновой жидкости

$$\frac{Q}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l}, \quad (14.12,1)$$

тогда как (14.9) сводится к параболическому распределению

$$v = \frac{(R^2 - r^2) \Delta p}{4l\eta}, \quad (14.9,1)$$

а ядро отсутствует.

Уравнение (14.12) было экспериментально подтверждено Скотт-Блером и Кроутером¹⁾ для грунтовых, в

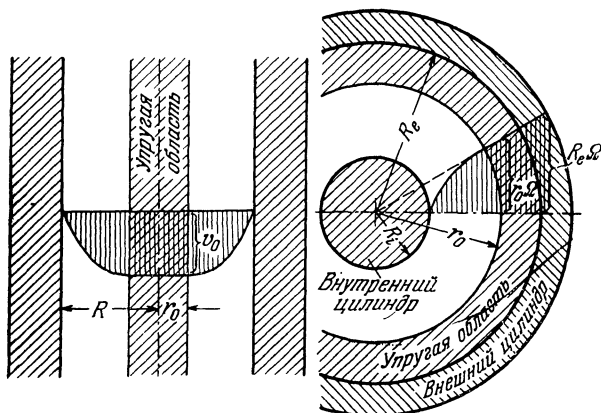


Рис. 12. Пластическое течение в трубе (слева) и ротационном приборе (справа). Здесь R — радиус трубы, R_i — радиус внутреннего и R_e — радиус внешнего цилиндров.

частности глинистых, паст и Воляровичем, Кулаковым и Романским²⁾ для суспензий грунта.

¹⁾ См. Scott Blair G. W., Crowther E. M., J. Phys. Chem. 33, 321 (1921).

²⁾ Wolarowitch M. P., Kulakoff N. N., Romansky A. N., Kolloid-Z. 71, 267 (1935). [На русском языке см. Волярович М. П., Кулаков Н. Н., Романский А. Н., Известия АН СССР, № 10, 1371 (1935); Коллоидный журнал 3, 163 (1937). (Прим. ред.)]

β) *Ротационный прибор с вращающимися цилиндрами.* В этом приборе материал течет в окружном направлении внутри зазора между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_i и R_e , из которых внутренний цилиндр удерживается крутящим моментом M в покое, а внешний цилиндр вращается с угловой скоростью Ω . В этом случае $v_r = v_z = 0$ и

$$v_\theta = r\dot{\theta} = rf(r). \quad (14.13)$$

Из соотношений (7.9) найдем:

$$2\dot{d}_{r\theta} = r \frac{d\dot{\theta}}{dr} = rf'(r) \quad (14.14)$$

и из (14.3)

$$\tau_{r\theta} = \vartheta_t + \eta_{pl} rf'(r). \quad (14.15)$$

Из первого уравнения (7.10), пренебрегая объемными силами, получим, что p — постоянная величина, равная атмосферному давлению, тогда как второе уравнение дает:

$$\frac{d\tau}{dr} + 2 \frac{\tau}{r} = 0, \quad (14.16)$$

и после интегрирования имеем:

$$\tau = \frac{C_1}{r^2}. \quad (14.17)$$

Подставляя вместо τ его значение из (14.15), получим:

$$\frac{C_1}{r^3} = \frac{\vartheta}{r} t + \eta_{pl} f'(r) \quad (14.18)$$

и после интегрирования

$$\eta_{pl} \dot{\theta} = \frac{C_1}{2r^2} - \vartheta \ln r + C_2. \quad (14.19)$$

Полагая, что при $r = R_i$ скольжение отсутствует, находим:

$$C_2 = \frac{C_1}{2R_i^2} + \vartheta \ln R_i \quad (14.20)$$

и, следовательно,

$$\eta_{pl} \dot{\theta} = \frac{C_1}{2} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \vartheta \ln \frac{r}{R_i}. \quad (14.21)$$

Постоянная интегрирования C_1 может быть определена из условия, что момент поверхностных сил, действующих на один из цилиндров M_z , не зависит от r . Следовательно,

$$M_z = \tau \cdot 2\pi r h r, \quad (14.22)$$

где h — длина погруженной части внутреннего цилиндра. Отсюда из (14.17)

$$C_1 = \frac{M}{2\pi h}, \quad (14.23)$$

и, подставив в (14.21), имеем:

$$\Omega = \frac{1}{\eta_{pl}} \left[\frac{M}{4\pi h} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) - \phi \ln \frac{R_e}{R_i} \right]. \quad (14.24)$$

Это уравнение Рейнера—Ривлина. При $\phi=0$ оно превращается в уравнение Маргулиса для ньютоновой жидкости:

$$\Omega = \frac{M}{4\pi h \eta} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right). \quad (14.24,1)$$

Из уравнения (14.22) видно, что касательное напряжение τ максимально, где r имеет минимальное значение, т. е. на поверхности внутреннего цилиндра. Там, где $M_z < 2\phi \pi R_i^2 = M_0$, материал между цилиндрами деформируется упруго и не течет. Когда M_z превысит значение M_0 , материал начинает течь. Однако до тех пор, пока напряжение вблизи внутренней поверхности внешнего цилиндра меньше ϕ , существует область упругих деформаций, где материал вращается как одно целое с внешним цилиндром (см. правую часть рис. 12). Напряжение у стенки внешнего цилиндра равно $M_z/2\pi h R_e^2$. Если M_z превышает $M_1 = 2\pi h R_e^2 \phi$, то весь материал в зазоре между цилиндрами пластически течет. В этом состоит существенная разница между пластическим течением в ротационном приборе и течением в трубе.

Уравнение (14.24) было экспериментально подтверждено Воляровичем и Толстым (1935)¹⁾ для суспензий гли-

¹⁾ Wolarowitch M. P., Tolstoi D. M., Kolloid-Z. 70, 165 (1935). [См. на русском языке: Волярович М. П., Толстой Д. М., Журн. физ. химии 4, № 6, 815 (1934); Волярович М. П., Применение методов исследования вязкости и пластичности в прикладной минералогии, Труды Института прикладной минералогии, вып. 66 (1934). (Прим. ред.)]

ны, а также Воларовичем и Самариной (1935)¹⁾ для хлебного теста. Грин (1949) с помощью высокоскоростного ротационного пластометра ²⁾ исследовал ряд материалов в широком интервале скоростей деформаций и также получил полное подтверждение уравнения (14.24).

В качестве переменных в уравнение (14.12) для капиллярного прибора удобно ввести величины

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{4Q}{\pi R^3 t}, \\ P &= \frac{R \Delta p}{2l}, \end{aligned} \right\} \quad (14.25)$$

а в уравнение (14.24) для ротационного прибора

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{2\Omega}{1-\alpha}, \\ P &= \frac{M}{2R_i^2 \pi h}, \end{aligned} \right\} \quad \alpha = \left(\frac{R_i}{R_e} \right)^2. \quad (14.26)$$

Формулы (14.12) и (14.24) принимают при этом вид

$$V = \frac{P}{\eta_{pl}} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{\Phi}{P} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Phi}{P} \right)^4 \right], \quad (14.27)$$

$$V = 2 \frac{P}{\eta_{pl}} \left[1 + \frac{\Phi}{P} \frac{\ln \alpha}{2(1-\alpha)} \right]. \quad (14.28)$$

Графики $V - P$ не зависят от размеров приборов и, следовательно, отражают определенное *свойство* материала. Это свойство, называемое *консистентностью*, определено Американским обществом испытания материалов (ASTM) как «свойство материала, связанное с его сопротивлением изменению формы, . . . определяемое зависимостью скорости течения от силы». Величины V и P называются *консистентными переменными*, а графики в координатах $V - P$ (14.27) и (14.28) — *кривыми консистентности* (рис. 13). Как можно видеть, P представляет собой касательное напряжение τ в материале вблизи неподвиж-

¹⁾ Wolarowitch M. P., Samarina K. I., Kolloid-Z. 70, 280 (1935). [См. на русском языке: Советское мукомолье, № 12, 17 (1934). (Прим. ред.)]

²⁾ Этот прибор использовался при измерениях тиксотропии (см. § 46).

ной стенки прибора, тогда как V есть средний градиент скорости.

При выводе формул (14.12) и (14.24), а также (14.27) и (14.28) предполагалось, что материал прилипает к стенкам трубки или цилиндра, а скольжение отсутствует. В противном случае наблюдается скольжение материала относительно стенки¹⁾. При наличии такого рода эффектов кривые $V - P$ будут зависеть от размеров прибора.

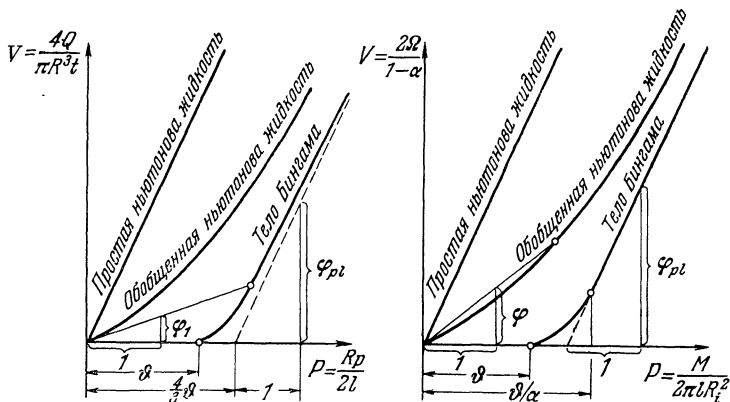


Рис. 13. Кривые консистенции для трех типов материалов в случае течения в трубе (слева) и ротационном приборе (справа). Эффективная текущая φ меняется от 0 до φ_{pl} .

При этом в расчеты вводят член, учитывающий скольжение, т. е. полагают, что $v=v_R$ при $r=R$ вместо $v=0$. Скотт-Блер с сотрудниками²⁾ исследовали область очень малых скоростей сдвига. При этом оказалось, что кривая консистенции для глинистых и грунтовых паст делится на 4 области. В области I течения нет, область II представляет собой прямую линию, в области III линия заметно искривлена и, наконец, в области IV кривая асимптотически стремится к прямой. Область II обусловлена скольжением. Результат Скотт-Блера был в том, что он обна-

¹⁾ Иногда для описания этого явления используется термин «пристенный эффект» или «пристенное скольжение». (Прим. ред.)

²⁾ Scott Blair G. W. (1938), стр. 32–41.

ружил область I, т. е. обнаружил, что необходимо вполне определенное напряжение, чтобы *началось скольжение*.

Другая группа явлений, установленная Шофилдом и Скотт-Блером¹⁾ и также обнаруживающая отступления от парабола четвертого порядка R^4 , описываемой уравнением Пуазейля, была названа σ -эффектом. При наличии положительного σ -эффекта материал течет относительно быстрее в узкой, чем в широкой, трубке. Описан также и отрицательный σ -эффект. Последний может в некоторых случаях оказывать значительно большее влияние, чем течение в области II, описанной выше.

Эффективный коэффициент вязкости η_1 , определяемый в соответствии с зависимостью (11.1) по формуле $\eta_1 = s/2\dot{d}$, равен

$$\eta_1 = \eta_{pl} + \frac{\phi}{2\dot{d}}. \quad (14.29)$$

Эта вязкость представляет собой результат измерений по методике, описанной выше и применяемой, в частности, технологами по краскам. Она равна бесконечности, когда $s = \phi$ и $\dot{d} = 0$, и асимптотически стремится к η_{pl} , когда $\dot{d} \rightarrow \infty$ (ср. рис. 13).

Таблица 5

Пределы текучести ϕ и пластические вязкости η_{pl}
(порядок величин)

Материал	ϕ в бар	η_{pl} в пз	Материал	ϕ в бар	η_{pl} в пз
Масляная краска	10^2	1	Песчано-битумная смесь	10^6	10^{11}
Тесто	10^3	10^3	Медь, алюминий	10^9	
Цементная паста	10^4	10^2	Железо, сталь	10^{10}	
Глина	10^5				

Олдرويد²⁾ установил, что динамическое подобие в геометрически подобных системах определяется для тела Бингама двумя безразмерными критериями, т. е. *числом*

¹⁾ Скотт-Блер, см. предыдущую сноску.

²⁾ Oldroyd J. G., Proc. Cambridge Phil. Soc. 43, 383 (1947).

Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{V_{\text{ед}}}{\eta_1} \quad (14.30)$$

и так называемым теперь числом Олдройда

$$\text{O} = \frac{\dot{\vartheta} d}{\eta_1 V}, \quad (14.31)$$

где d — характерный размер и V — характерная скорость. Если Re настолько мало, что инерционными членами можно пренебречь, а O достаточно велико, то при сравнительно медленном пластическом течении образуется *пластический пограничный слой*, примыкающий к *поверхности текучести*, аналогичной цилиндрическим поверхностям в двух рассмотренных случаях. Поверхность текучести отделяет слой, где происходит пластическое течение, от остальной части материала, деформированного упруго, который может перемещаться, но не течет. Вводя функцию тока, Олдройд решил уравнения движения для некоторых случаев плоского пластического течения. В последующих работах¹⁾ им рассмотрено течение в зазоре между двумя эксцентричными круглыми цилиндрами, а также между двумя софокусными эллиптическими цилиндрами, из которых один неподвижен, а второй движется в осевом направлении при градиенте давления, равном нулю.

При $\dot{\vartheta} \rightarrow 0$ тело Бингама вырождается в ньютонову жидкость. При $\eta_{pl} \rightarrow 0$ оно переходит в тело Прандтля. Таким образом, любое решение для тела Бингама пригодно в частных случаях и для этих двух классических тел.

Некоторые значения $\dot{\vartheta}$ и η_{pl} приведены в таблице 5, дающей порядок их величин.

15. Упругое последствие и тело Кельвина. Упругое последствие описывается *телом Кельвина*, реологическая формула которого имеет вид

$$K = H \mid N. \quad (15.1)$$

Из этой формулы методом, изложенным в предыдущем разделе, получаем реологическое уравнение

$$s = 2\mu\epsilon + 2\eta_s \dot{\epsilon}. \quad (15.2)$$

¹⁾ Oldroyd J. G., Proc. Cambridge Phil. Soc. 43, 396, 521 (1947).

Последнее представляет собой линейное дифференциальное уравнение относительно ε , решением которого является интеграл

$$\varepsilon = e^{-\frac{\mu}{\eta_s} t} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{2\eta_s} \int s e^{\frac{\mu}{\eta_s} t} dt \right), \quad (15.3)$$

где ε_0 — начальная деформация. Пусть $s = s_c = \text{const.}$ Уравнение (15.3) записывается при этом в виде

$$\varepsilon = \frac{s_c}{2\mu} + \left(\frac{\varepsilon_0 - s_c}{2\mu} \right) \exp \left(-\frac{t}{T_{\text{ret}}} \right), \quad (15.4)$$

где ¹⁾

$$T_{\text{ret}} = \frac{\eta}{\mu}. \quad (15.5)$$

Формула (15.4) дает семейство кривых зависимости напряжений от времени, представленных на рис. 14.

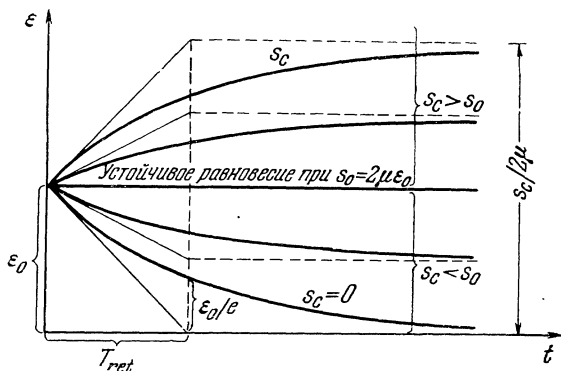


Рис. 14. Кривые зависимости деформации от времени при постоянном напряжении s_c для тела Кельвина. Образец вначале ($t=0$) деформируется до значения деформации ε_0 и затем подвергается действию постоянного напряжения s_c .

Если $s_c = s_0 = 2\mu \varepsilon_0$, то мы имеем дело со случаем статического равновесия, как для тела Гука. Следовательно, тело Кельвина является твердым телом, а его вязкость — вязкостью твердого тела. Если $s_c < s_0$, то деформация

¹⁾ Индекс *ret* в T_{ret} происходит от англ. *retardation* — запаздывание (последствие). (Прим. ред.)

постепенно уменьшается; если $s_c > s_0$, то постепенно возрастает с уменьшающейся скоростью. Таким образом, если T_{ret} слишком велико, то упругое последствие может восприниматься нами как медленное течение. Поэтому оно иногда называется (неустановившейся) *ползучестью*. Наконец, при $t = \infty$ деформация достигает значения $s_c/2\mu$. Следовательно, деформация тела Кельвина не развивается мгновенно, а задерживается вследствие упругого *преддействия* при нагрузке; величина T_{ret} представляет

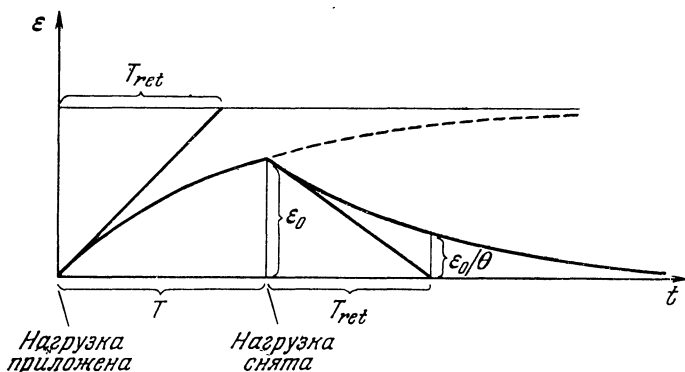


Рис. 15. Упругое последствие при нагрузке и разгрузке. Требуется неопределенно долгое время для полного восстановления деформации ε_0 , нараставшей в течение конечного интервала времени T .

собой время последствия. Если напряжение снять ($s_c = 0$), то деформация сдвига по закону *упругого последствия при возврате* (или *обратного упругого последствия*) полностью исчезает при $t = \infty$. Если T_{ret} не слишком велико, то процесс практически завершается по истечении какого-то конечного промежутка времени. *Эффекты запаздывания* при нагрузке и разгрузке вызываются упругим последствием. На рис. 15 представлены кривые зависимости деформации от времени при постоянной нагрузке и после разгрузки. Обе кривые взяты из рис. 14 (они были представлены также на рис. 10). Как отмечалось Джеффрисом¹⁾, тело Кельвина обладает некоторым сопротивлением, *допол-*

¹⁾ Jeffreys (1952), стр. 10.

нительным к упругому. Это свойство им названо *псевдо-вязкостью* (firmo-viscosity).

Как видно из цитаты из работы Кельвина, приведенной в § 12, К-тело было предложено с целью объяснения затухания при упругих колебаниях.

Совершенно ясно, что представления, развитые здесь для девиаторов напряжений и деформаций, могут быть применены и для изотропных компонент этих тензоров. Таким образом, мы приходим к *объемной вязкости Кельвина*, или к *объемной вязкости последействия*. Пусть ζ обозначает объемную вязкость и ζ_s — *объемную вязкость последействия*; тогда затухание продольных волн будет обусловлено, наряду с другими причинами, также и ζ_s и соотношение (9.1) может быть заменено формулой

$$-p_m = \kappa \epsilon_v + \zeta_s \dot{\epsilon}_v, \quad (15.6)$$

где давление p_m определяется выражением (4.6). Из уравнений (15.2)¹⁾ и (15.6), принимая во внимание (3.13) и (10.3), получим:

$$s_{lm} = (\lambda \epsilon_v + \lambda_v \dot{\epsilon}_v) \delta_{lm} + 2\mu \epsilon_{lm} + 2\eta_s \dot{\epsilon}_{lm}, \quad (15.7)$$

где

$$\lambda_v = \zeta_s - \frac{2\eta_s}{3}. \quad (15.8)$$

В классической гидродинамике реологическое уравнение вязкой жидкости записывается в форме

$$s_{lm} = (-p + \lambda_v \dot{\epsilon}_v) \delta_{lm} + 2\eta f_{lm}. \quad (15.9)$$

Величина f_{lm} по образцу (3.11) определяется в виде

$$f_{lm} = \frac{1}{3} f_{\alpha\alpha} \delta_{lm} + f_{lm(0)}. \quad (15.10)$$

Так как $f_{\alpha\alpha} = \dot{\epsilon}_v$, уравнение (15.9) будет

$$s_{lm} = -p \delta_{lm} + \frac{1}{3} (3\lambda_v + 2\eta) \dot{\epsilon}_v \delta_{lm} + 2\eta f_{lm(0)}. \quad (15.11)$$

¹⁾ Напомним, что там вместо $s_{lm(0)}$ применялось s , а вместо $\epsilon_{lm(0)}$ было ϵ .

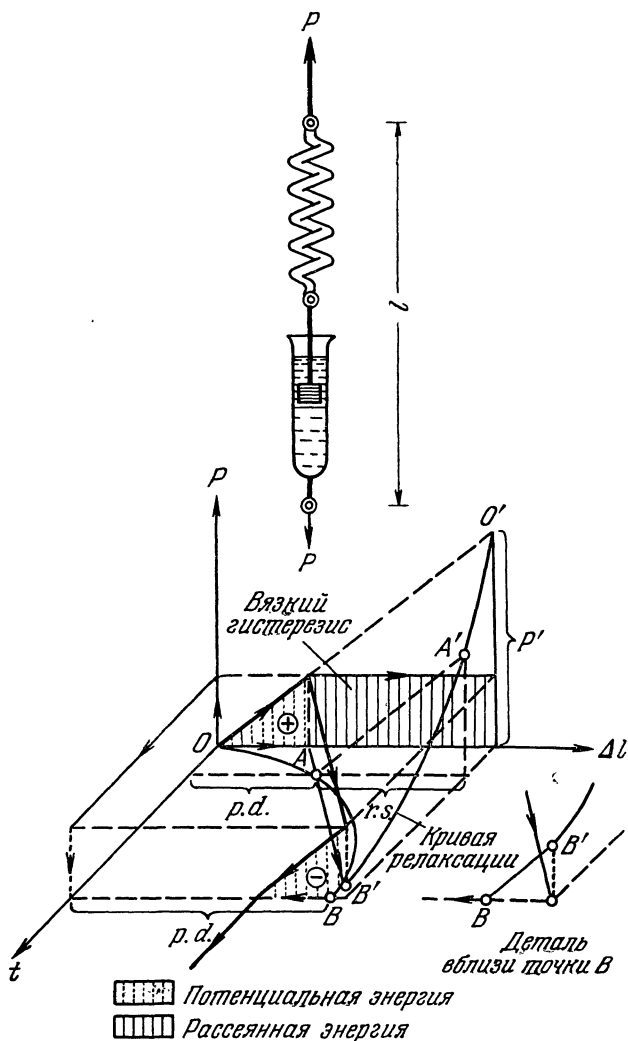


Рис. 16. Схема модели тела Максвелла (М-тела). OAB — спад упругой деформации как функция от времени. $O'A'B'$ — кривая релаксации напряжения P' ; $p. d.$ — остаточная деформация; $r. s.$ — обратимая деформация.

Знак \oplus соответствует накопленной энергии, знак \ominus — относится к возвращенной энергии.

Обычно полагают, что

$$3\lambda_v + 2\eta = 0, \quad (15.12)$$

и уравнение (15.11) сводится к классическому (11.3). Равенство (15.12) названо *соотношением Стокса*, как это будет отмечено в § 24.

16. Упруго-вязкость, тело Максвелла. Свойство упруго-вязкости типично для *тела Максвелла*

$$M = H - N, \quad (16.1)$$

модель которого представлена на рис. 16. Его реологическое уравнение вытекает из соотношений (9.1) для тела Гука и (10.1) для ньютоновой жидкости в результате сложения скоростей деформации и имеет вид

$$\dot{d} = \frac{\dot{s}}{2\mu_l} + \frac{s}{2\eta}, \quad (16.2)$$

где вместо $\dot{\epsilon}$ и f нами записано \dot{d} , так как эта величина включает в себя и скорость упругих деформаций и вязкое течение.

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением относительно s . Его решение будет

$$s = e^{-\frac{\mu_l}{\eta} t} \left(s_0 + 2\mu_l \int \dot{d} e^{\frac{\mu_l}{\eta} t} dt \right), \quad (16.3)$$

где s_0 — начальное напряжение. Пусть скорость деформации $\dot{d} = \dot{d}_0 = \text{const}$; при этом уравнение (16.3) запишется следующим образом:

$$s = 2\dot{d}_c \eta + (s_0 - 2\dot{d}_c \eta) \exp\left(-\frac{t}{T_{\text{rel}}}\right), \quad (16.4)$$

где

$$T_{\text{rel}} = \frac{\eta}{\mu_l}. \quad (16.5)$$

Выражение (16.4) описывает семейство кривых зависимости напряжений от времени, представленных на рис. 17.

Если $\dot{d}_c = \dot{d}_0 = s_0/2\eta$, то будет наблюдаться установившееся течение, причем внутренние силы будут находиться в равновесии с внешними нагрузками, как и в случае ньютоновой жидкости. Тело Максвелла, хотя и обладает некоторой

упругостью, представляет собой жидкость, что отмечено индексом l в μ_l ¹⁾. Если под действием некоторого напряжения s_0 в теле возникает деформация и в дальнейшем эта деформация остается постоянной ($\dot{d}_0=0$), то напряжение убывает в соответствии с уравнением релаксации

$$s = s_0 \exp\left(-\frac{t}{T_{\text{rel}}}\right), \quad (16.6)$$

где T_{rel} — время релаксации.

Если $\dot{d}_c > s_0/2\eta$, то напряжение возрастает; если $\dot{d}_c < s_0/2\eta$, то уменьшается до тех пор, пока не достигнет

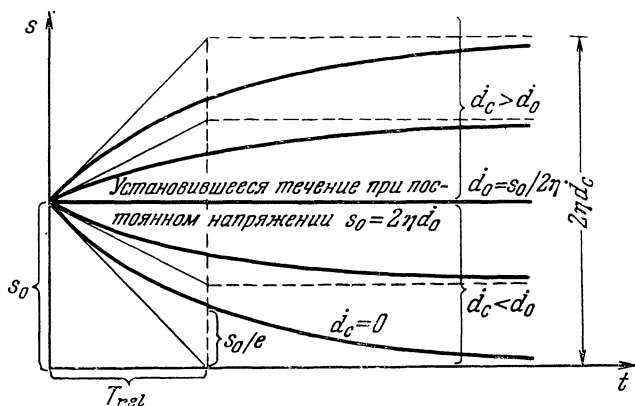


Рис. 17. Кривые зависимости напряжений от времени для тела Максвелла (M -тела) при постоянной скорости деформации \dot{d}_c . Образец сначала ($t=0$) подвергнут действию напряжения s_0 и затем деформируется с постоянной скоростью \dot{d}_c . Для любого начального напряжения s_0 существует определенная скорость деформации \dot{d}_0 , при которой напряжение не меняется.

постоянного значения. Если напряжение возрастает с постоянной скоростью, т. е. $\dot{s}=\dot{s}_c$ и, следовательно, $s=\dot{s}_c t$, то деформация возрастает по закону²⁾

$$2d(t) = \frac{\dot{s}_c}{\mu} \left(t + \frac{t^2}{2T_{\text{rel}}} \right) = \frac{s}{\mu} \left(1 + \frac{t}{2T_{\text{rel}}} \right). \quad (16.7)$$

1) От англ. слова liquid — жидкий. (Прим. ред.)

2) Индекс l в μ_l для простоты опущен.

Тело Максвелла ведет себя в соответствии с величиной T_{rel} , причем последняя играет роль масштаба времени. Записав (16.2) в форме

$$\left. \begin{aligned} 2d &= \frac{\left(s + \frac{1}{T_{\text{rel}}} \int s \, dt \right)}{\mu}, \\ s &= 2\eta \dot{d} - \dot{s} T_{\text{rel}}, \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

мы видим, что если продолжительность эксперимента очень мала ($t \ll T_{\text{rel}}$), то $d = s/2\mu$, а материал ведет себя, как твердое тело Гука; если продолжительность слишком велика ($T_{\text{rel}} \ll t$), то $s = 2\eta \dot{d}$ и материал ведет себя как вязкая ньютонова жидкость. В качестве примера мы можем рассмотреть бетон. Если нагрузка действует в течение периода, измеряемого днями или часами, то бетон ведет себя, как упругое твердое тело, в связи с чем он может применяться как строительный материал; но если наблюдения за деформациями бетона вести годами, можно заметить течение ¹⁾. Течение, определяемое уравнением $2\dot{d}_0 = s_0/\mu T_{\text{rel}}$, часто называют (установившейся) *ползучестью*, причем, в противоположность неуставившейся ползучести, эта деформация является необратимой: после снятия нагрузки тело остается в деформированном состоянии.

Джеффрис назвал свойство, описываемое уравнением (16.2), *упруго-вязкостью*. Модель Максвелла и ее реологическое уравнение широко используются для описания поведения таких различных материалов, как 1,5%-ный раствор крахмала ²⁾ и, как упоминалось выше, бетон ³⁾. Следует отметить, что сам Максвелл предложил свое уравнение, чтобы объяснить вязкость газа релаксацией упругих напряжений. В то время как общепринятая теория вязкости следовала методу Стокса и основывалась на уравнении (11.1), Максвелл ввел представление о деформации упругого «тела» жидкости в условиях равновесия. Деформация вызывает отклонение тензора напряжений

¹⁾ Данные по этому вопросу см. в § 20.

²⁾ Hess W. R., Kolloid-Z. 27, 154—163 (1920).

³⁾ См. статью Фрейденшталя в книге под редакцией Рейнера (1954).

от напряжений всестороннего сжатия. Это отклонение имеет тенденцию к уменьшению, и, когда оно исчезнет полностью, восстановится состояние равновесия. Переход от начального состояния к равновесному требует некоторого периода времени, различного для разного рода жидкостей и называемого периодом релаксации. Из кинетической теории газов он вычислил, что для воздуха $T_{\text{rel}} = 1,961 \cdot 10^{-10}$ сек. Идея Максвелла о вязком течении была, по-видимому, забыта нашим поколением. Характерно, что в первом издании энциклопедии «Handbuch der Physik»¹⁾, вышедшем в двадцатых годах, изложенные здесь представления Максвелла не упоминались. К этому мы вернемся в § 34.

17. Упругие золи и тело Лесерсича. Для описания реологического поведения битумов Лесерсич постулировал реологическую формулу

$$L = N - K. \quad (17.1)$$

Ее реологическое уравнение определяется в результате сложения скоростей деформации, обусловленных N - и K -элементами. Из уравнения (11.1), заменяя f на \dot{d} , имеем:

$$\dot{d}_N = \frac{s}{2\eta_N}. \quad (17.2)$$

С другой стороны, из (15.3), заменяя $\dot{\epsilon}$ на \dot{d} , получим:

$$\dot{d}_K = \frac{s}{2\eta_K} - \frac{\mu}{\eta_K} e^{-\frac{\mu}{\eta_K} t} \left(d_{0K} + \frac{1}{2\eta_K} \int s e^{\frac{\mu}{\eta_K} t} dt \right), \quad (17.3)$$

где d_{0K} —деформация элемента Кельвина в момент времени $t=0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{d}_L = \dot{d}_N + \dot{d}_K = & \frac{s}{2} \frac{\eta_N + \eta_K}{\eta_N \eta_K} - \\ & - \frac{\mu}{\eta_K} e^{-\frac{\mu}{\eta_K} t} \left(d_{0K} + \frac{1}{2\eta_K} \int s e^{\frac{\mu}{\eta_K} t} dt \right), \end{aligned} \quad (17.4)$$

¹⁾ См. книгу под ред. Grammel R., Handbuch der Physik, Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper, Bd. VII, 1927; Mechanik der elastischen Körper, Bd. VI, 1928, Berlin, Springer-Verlag. (Прим. ред.)

где различного рода вязкости обозначаются индексами N и K . Если напряжение постоянно и равно s_c , то мы можем вычислить интеграл в уравнении (17.4) и получим:

$$\dot{d} = \frac{s_c}{2\eta_N} + \frac{s_c - 2\mu d_{0K}}{2\eta_K} e^{-\frac{\mu}{\eta_K} t}, \quad (17.5)$$

т. е. скорость деформации уменьшается от

$$\dot{d}_0 = \frac{s_c}{2} \left(\frac{1}{\eta_N} + \frac{1}{\eta_K} \right) - \frac{\mu}{\eta_K} d_{0K} \quad \text{при } t = 0$$

до $\dot{d}_\infty = s_c/2\eta_N$ при $t = \infty$. Интегрируя уравнение (17.5), получим формулу для вычисления деформации:

$$d = d_0 + \frac{s_c}{2\eta_N} t + (1 - e^{-\frac{\mu}{\eta_K} t}) \left(\frac{s_c}{2\mu} - d_{0K} \right). \quad (17.6)$$

Деформация растет от величины d_0 до $d_\infty = \infty$.

Если мы разгрузим образец ($s_c = 0$) после того, как деформация достигла некоторой величины d_0 , то последняя будет уменьшаться по закону

$$d = d_0 - d_{0K} (1 - e^{-\frac{\mu}{\eta_K} t}) \quad (17.7)$$

от d_0 до $d_0 - d_{0K}$. Деформация вязкого течения, не исчезающая после сколь угодно продолжительного времени опыта, равна

$$d_0 - d_{0K} = \frac{s_c}{\eta_N} T, \quad (17.8)$$

где T — время действия напряжения s_c .

Уравнение (17.4) в результате дифференцирования и замены второго члена правой части (в скобках) может быть приведено к виду

$$s + \dot{s} \frac{\eta_N + \eta_K}{\mu} = 2\eta_N \left(\dot{d} + \frac{\eta_K}{\mu} \ddot{d} \right). \quad (17.9)$$

В свою очередь это уравнение можно преобразовать следующим образом. Пусть начальная деформация была d_0 и в момент $t=0$ тело было освобождено от напряжений, так что $s = \dot{s} = 0$. Уравнение (17.9) сводится при этом к дифференциальному уравнению относительно d ,

интегрирование которого дает

$$d - d_{\infty} = (d_0 - d_{\infty}) e^{-\frac{\mu}{\eta_K} t}. \quad (17.10)$$

Часть деформации $d_0 - d_{\infty}$ постепенно исчезает, причем время последдействия равно

$$T_{\text{ret}} = \frac{\eta_K}{\mu}. \quad (17.11)$$

Пусть в свою очередь деформация поддерживается постоянной в результате соответствующего изменения напряжений, так что $\dot{d} = \dot{d}^* = 0$. Решение уравнения (17.9) при этом будет

$$s = s_0 e^{-\frac{\mu}{\eta_N + \eta_K} t}, \quad (17.12)$$

из которого следует, что напряжение релаксирует, причем время релаксации

$$T_{\text{rel}} = \frac{\eta_N + \eta_K}{\mu}. \quad (17.13)$$

Таким образом, мы можем переписать уравнение (17.9) в более общей форме:

$$s + s \dot{T}_{\text{rel}} = 2\eta_L (\dot{d} + \dot{d}^* \dot{T}_{\text{ret}}). \quad (17.14)$$

Тело Лесерсича пригодно для описания реологического поведения упругих золь. Здесь, однако, возникает вопрос: как объяснить механизм релаксации упругих напряжений и постепенное рассеяние упругой потенциальной энергии, связанное с временем релаксации формулой (17.3)? Можно грубо представить себе структуру упругого золь следующим образом. Дисперсной фазой являются упругие частицы в виде пружинок или иной формы, взвешенные в неупругой среде, например воде. Когда дисперсионная среда со взвешенными в ней частицами непрерывно деформируется (течет), возникают напряжения, растягивающие или сжимающие такого рода упругие

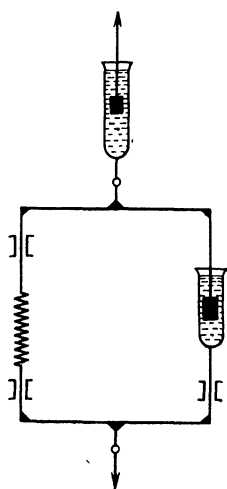


Рис. 18. Схема модели тела Лесерсича (L-тела).

пружинки. Таким образом, упругость дисперсной системы проявляется при *течении раствора*. Когда течение прекращается, растянутые частицы сокращаются и внутренние напряжения в системе исчезают. Этот процесс вследствие вязкого сопротивления происходит во времени, т. е. характеризуется временем релаксации. В таких золях напряжения от одной твердой частицы к соседней передаются через жидкость, внешние же силы действуют непосредственно на жидкую фазу. Этот механизм выражен реологической формулой (17.1), но более наглядно иллюстрируется схемой на рис. 18.

18. Релаксирующие гели и тело Джеффриса. Для описания реологического поведения земной коры Джеффрис постулировал материал, обобщаемый реологической формулой

$$J = N | M. \quad (18.1)$$

Эта формула описывает преимущественно гели. В геле, который является дисперсией жидкости в твердом теле, внешние поверхностные силы действуют непосредственно на твердую фазу, и уже от твердого вещества напряжения передаются на жидкую фазу. В таких системах течение или ползучесть обусловлены релаксацией упругих напряжений, вызванных деформацией упругого скелета. В то же время упругое поведение твердой фазы замедляется реакцией жидкой фазы, механизм которой описан Кельвином (см. § 13).

Реологическое уравнение, соответствующее формуле (18.1), имеет вид

$$s = 2\eta_N \dot{d} + e^{-\frac{\mu}{\eta_M} t} \left(s_{0M} + 2\mu \int \dot{d} e^{\frac{\mu}{\eta_M} t} dt \right). \quad (18.2)$$

Если напряжение $s = s_c = \text{const}$, то дифференцирование уравнения (18.2), исключение интеграла и интегрирование полученного дифференциального уравнения дают

$$2\dot{d} = 2\dot{d}_0 + \frac{s_c}{\eta_M + \eta_N} t + \frac{\eta_M \eta_N}{\mu (\eta_M + \eta_N)} \left(2\dot{d}_0 - \frac{s_c}{\eta_M + \eta_N} \right) \times \\ \times \left[1 - \exp \left(-\mu \frac{\eta_M + \eta_N}{\eta_M \eta_N} t \right) \right]. \quad (18.3)$$

Из уравнения (18.2) получим:

$$\dot{d}_0 = \frac{s_c - s_{0M}}{2\eta_M}, \quad (18.4)$$

и равенство (18.3) примет вид

$$2d = 2d_0 + \frac{s_c}{\eta_M + \eta_N} t + \frac{\eta_M}{\mu (\eta_M + \eta_N)^2} [s_c \eta_M - s_{0M} (\eta_M + \eta_N)] \times \\ \times \left[1 - \exp \left(-\mu \frac{\eta_M + \eta_N}{\eta_M \eta_N} t \right) \right]. \quad (18.5)$$

Если мы нагрузим недеформированный образец ($d_0 = 0$), напряжения в котором релаксировали полностью ($s_{0M} = 0$), то деформация будет нарастать со скоростью, определяемой уравнением

$$2\dot{d} = \frac{s_c}{\eta_M + \eta_N} + s_c \frac{\eta_M}{\eta_N (\eta_M + \eta_N)} \exp \left(-\frac{\eta_M + \eta_N}{\eta_M \eta_N} t \right). \quad (18.6)$$

При этом скорость изменяется от

$$\dot{d}_0 = \frac{s_c}{2\eta_N} \quad (18.7)$$

до

$$\dot{d}_\infty = \frac{s_c}{2(\eta_M + \eta_N)}. \quad (18.8)$$

Если мы разгрузим образец, деформация которого достигла некоторой величины d_0 , то последняя будет уменьшаться по формуле

$$2d = 2d_0 + \frac{s_{0M} \eta_N}{\mu (\eta_M + \eta_N)} \left[1 - \exp \left(-\mu \frac{\eta_M + \eta_N}{\eta_M \eta_N} t \right) \right] \quad (18.9)$$

от величины d_0 до $d_0 - s_c \frac{\eta_M}{2\mu (\eta_M + \eta_N)}$, где напряжение M -элемента, а именно s_{0M} , представляет собой напряжение s_M , достигнутое в конце периода нагружения T . Оно может быть найдено из уравнения

$$s_{0M} = s_c - 2\eta_N \dot{d} = s_c \frac{\eta_M}{\eta_M + \eta_N} \left[1 - \exp \left(-\mu \frac{\eta_M + \eta_N}{\eta_M \eta_N} T \right) \right]. \quad (18.10)$$

Следовательно, имеем:

$$d_\infty = \frac{s_c}{2(\eta_M + \eta_N)} t. \quad (18.11)$$

Таким образом, вязкая часть деформации не восстанавливается.

Уравнение (18.2) может быть упрощено дифференцированием по времени и заменой выражения в скобках. Полагая

$$T_{\text{rel}} = \frac{\eta_M}{\mu}, \quad (18.12)$$

получим:

$$s + \dot{s}T_{\text{rel}} = 2(\eta_N + \eta_M) \left(\dot{d} + \frac{\eta_N}{\eta_N + \eta_M} T_{\text{rel}} \ddot{d} \right). \quad (18.13)$$

Создавая деформацию d_c и поддерживая ее постоянной ($\dot{d} = \ddot{d} = 0$), находим, что напряжение релаксирует в соответствии с T_{rel} . С другой стороны, если мы освободим деформированное тело от напряжений, т. е. положим $s = \dot{s} = 0$, то деформация будет уменьшаться по закону

$$d - d_\infty = (d_0 - d_\infty) \exp \left(-\frac{\eta_N + \eta_M}{\eta_N} \frac{t}{T_{\text{rel}}} \right), \quad (18.14)$$

из которого видно, что упругость материала является запаздывающей с временем последействия

$$T_{\text{ret}} = \frac{\eta_N}{\eta_N + \eta_M} T_{\text{rel}}. \quad (18.15)$$

Вводя T_{ret} в уравнение (18.13), имеем:

$$s + \dot{s}T_{\text{rel}} = 2\eta_J (\dot{d} + T_{\text{ret}} \ddot{d}), \quad (18.16)$$

где

$$\eta_J = \eta_N + \eta_M. \quad (18.17)$$

Таким образом, мы снова получим реологическое уравнение типа (17.14) с другой, однако, интерпретацией структурных параметров. Схема модели J -тела представлена на рис. 19. Механическое поведение его не отличается от поведения L -тела (рис. 18). Если нанести на график кривые течения, соответствующие L - и J -телам, как на рис. 20, то они полностью совпадут. Здесь мы имеем дело со случаем эквивалентности механических моделей, упоминаемой в конце § 13.

Возникает вопрос: каким образом с помощью реологических наблюдений мы можем заглянуть внутрь структуры такого материала, чтобы отнести его к золям типа

L -тела или гелям J -тела? Здесь возможны два пути. В первых, порядок величины времени релаксации для J -тела много больше, чем для L -тела. Ярким примером материала, который может существовать в этих двух состояниях, является битум. Порядок величины T_{rel} для битума-золя или тела Лесерсича составляет $\leq 10^3$ сек. для битума-геля или тела Джеффриса $\geq 10^5$ сек, тогда как в переходной области могут существовать обе структуры. Когда Джеффрис (1929) постулировал уравнение (18.16) в форме

$$2\mu (d + T_{rel} \dot{d}) = s + \frac{1}{T_{rel}} \int s dt \quad (18.18)$$

Рис. 19. Схема модели тела Джеффриса (J -тела).

для описания реологического поведения земных горных пород, он имел в виду времена релаксации $\geq 10^8$ сек. Возвращаясь к формуле (18.12) и полагая, что порядок величины μ составляет 10^{12} бар, он вычислил вязкость $\eta_M \approx 5 \times 10^{20}$ пз. Время

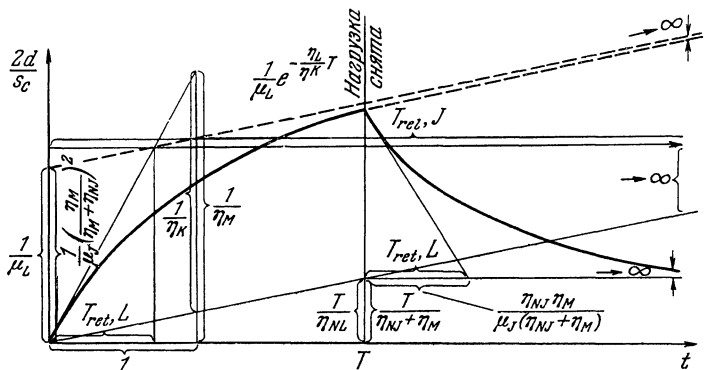


Рис. 20. Зависимость отношения деформации к напряжению от времени для постоянного напряжения s_c . Предполагается, что при $t=0$ деформация отсутствует. Тело Лесерсича (L -тело) характеризуется параметрами μ_L , η_{NL} , η_K , $T_{rel,L} = \eta_K/\mu_L$. Тело Джеффриса (J -тело) характеризуется параметрами μ_J , η_{NJ} , η_M , $T_{rel,J} = \eta_M/\mu_J$.

после действия по его подсчетам $T_{rel} = 4 \times 10^{-3}$ сек. Второй путь

заключается в исследовании материала при простом сдвиге, когда главные оси тела вращаются. В этом случае золь, в котором, как упоминалось выше, напряжение передается от жидкой к твердой фазе, ведет себя совершенно иначе, чем гель, напряжения у которого передаются от твердой фазы к жидкой. Это можно иллюстрировать моделью, представленной на рис. 21. Однако обе модели ведут себя совершенно одинаково и схемы имеют чисто символическое значение.

19. Неупругость и тело Пойнтинга — Томсона. Зинер¹⁾ ввел термин *неупругость* для обозначения свойства, описываемого реологической формулой

$$PTh = H | M. \quad (19.1)$$

Как уже отмечалось Кельвином, упругость такой системы является «совершенной» в том смысле, что вся деформация полностью исчезает при разгрузке и является поэтому «упругой». Механическая модель, описываемая формулой (19.1), была впервые предложена Пойнтингом и Томсоном²⁾ с целью объяснения поведения стеклянных волокон³⁾.

Система, описываемая моделью, будет обнаруживать мгновенную деформацию при внезапном приложении нагрузки. Величина этого мгновенного перемещения определяется исключительно двумя упругими константами. При постоянном напряжении сила, действующая на жидкостный элемент, постепенно релаксирует вследствие движения поршня, что вызывает постепенное нарастание общей

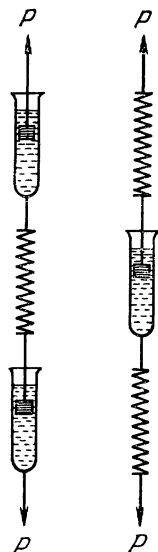


Рис. 21. Модели золя и геля Максвелла.

¹⁾ Zener C., *Elasticity and anelasticity of metals*, Chicago, 1948. [Русский перевод: Зинер, статья в сборнике «Упругость и неупругость металлов», ИЛ, М., 1954. (Прим. ред.)]

²⁾ См. Poynting, Thomson (1902). Пойнтинг и Томсон впервые ввели механические модели для описания реологических свойств.

³⁾ Они отметили, что этот эффект наблюдается также и у металлов, но почти совершенно отсутствует у кварцевых нитей.

деформации. Наоборот, если сила внезапно прекращает действие, то часть упругой энергии пружин мгновенно возвращается, и деформация частично исчезает. Полное освобождение всей энергии пружин происходит в результате постепенной релаксации напряжения, передаваемого жидкостным элементом. Следовательно, такая система сочетает в себе свойства мгновенной и задержанной упругости.

Чтобы получить реологическое уравнение идеального материала, соответствующего формуле (19.1), мы должны сложить напряжения, передаваемые элементами Гука и Максвелла. Последние определяются уравнениями (10.1) и (16.3), из которых имеем:

$$s = 2\mu_H \epsilon + e^{-\frac{\mu_M}{\eta} t} \left(s_0 + 2\mu_M \int \dot{\epsilon} e^{\frac{\mu_M}{\eta} t} dt \right). \quad (19.2)$$

Здесь модули упругости элементов Гука и Максвелла обозначаются соответственно индексами H и M . Если скорость деформации постоянна и равна $\dot{\epsilon}_c$, то мы можем вычислить интеграл уравнения (19.2) и получим:

$$s = 2\mu_H \dot{\epsilon}_c t + 2\eta \dot{\epsilon}_c + (s_0 - 2\eta \dot{\epsilon}_c) e^{-\frac{\mu_M}{\eta} t}. \quad (19.3)$$

Если деформация тела составляет ϵ_0 и поддерживается постоянной, так что $\dot{\epsilon}_c = \dot{\epsilon}_0 = 0$, то получим уравнение релаксации напряжений

$$s = s_0 e^{-t/T_{\text{rel}}}, \quad (19.4)$$

где время релаксации

$$T_{\text{rel}} = \frac{\eta}{\mu_M}. \quad (19.5)$$

В результате дифференцирования и замены второго члена правой части формула (19.2) может быть преобразована в уравнение

$$s + \dot{s} \frac{\eta}{\mu_M} = 2\mu_H \epsilon + 2 \frac{\mu_H + \mu_M}{\mu_M} \eta \dot{\epsilon}. \quad (19.6)$$

Пусть тело получило некоторую деформацию ϵ_0 и в момент $t=0$ нагрузка была снята, т. е. при $t=0$ $s = \dot{s} = 0$.

Из уравнения (19.6) при этом получим:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp \left[-\frac{\mu_H \mu_M}{\eta(\mu_H + \mu_M)} t \right], \quad (19.7)$$

т. е. процесс возврата происходит с последствием, время которого равно

$$T_{\text{ret}} = \frac{(\mu_H + \mu_M) \eta}{\mu_H \mu_M}. \quad (19.8)$$

При $t = \infty$ деформация *полностью* исчезает.

Поэтому уравнение (19.6) мы можем записать в форме

$$s + \dot{s} T_{\text{rel}} = 2\mu_H (\varepsilon + \dot{\varepsilon} T_{\text{ret}}). \quad (19.9)$$

20. Вязко-упругость, тело Бюргерса. Реологическая формула тела Бюргерса ¹⁾, изображенного на рис. 22, имеет вид

$$Bu = M - K. \quad (20.1)$$

Свойство, которое оно представляет, называется *вязко-упругостью*. Оно включает в себя неустановившуюся и установившуюся ползучесть. Мы получим реологическое уравнение этого тела, если сложим скорости деформации для M - и K -тел соответственно. Из (16.2) имеем:

$$\dot{d}_M = \frac{\dot{s}}{2\mu_M} + \frac{s}{2\eta_M}. \quad (20.2)$$

Заменяя в уравнении (15.3) $\dot{\varepsilon}$ на \dot{d} , получим (17.3). Из последнего имеем:

$$\begin{aligned} \dot{d}_{Bu} = \dot{d}_M + \dot{d}_K = \frac{s}{2} \frac{\eta_M + \eta_K}{\eta_M \eta_K} + \frac{\dot{s}}{2\mu_M} - \\ - \frac{\mu_K}{\eta_K} e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} \left(d_{0K} + \frac{1}{2\eta_K} \int_0^t s e^{\frac{\mu_K}{\eta_K} t} dt \right). \end{aligned} \quad (20.3)$$

Если напряжение $s = s_c = \text{const}$, то скорость деформации определяется, как и для тела Лесерсича, уравнением (17.5).

¹⁾ First report (1935), стр. 5—72.

Дифференцирование и замена третьего члена в скобках уравнения (20.3) приводят к выражению

$$\dot{d} + \frac{\eta_K}{\mu_K} \ddot{d} = \frac{s}{2\eta_M} + \frac{\dot{s}}{2} \frac{\eta_M \mu_K + \eta_M \mu_M + \eta_K \mu_M}{\eta_M \mu_K \mu_M} + \frac{\ddot{s}}{2} \frac{\eta_K}{\mu_M \mu_K}. \quad (20.4)$$

Если $\mu_M \rightarrow \infty$, то уравнение (20.2) вырождается в уравнение ньютоновой жидкости, а (20.4) — в (17.9). Таким обра-

зом, тело Лесерсича может рассматриваться как вырожденное тело Бюргерса.

При нагружении тело Бюргерса обнаруживает мгновенную и задержанную упругости, а также вязкое течение (т. е. неуставившуюся и установившуюся ползучести); при разгрузке наблюдаются мгновенная и запаздывающая упругие деформации, а также необратимая деформация вязкого течения. Тело Бюргерса обладает как временем релаксации, так и временем последдействия.

Чтобы найти выражение для времени релаксации, положим, что деформация тела является постоянной ($\dot{d} = \ddot{d} = 0$) и напряжение

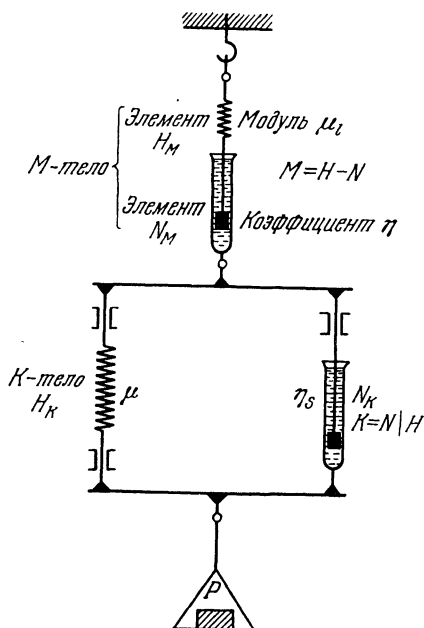
Рис. 22. Модель тела Бюргерса; H — упругий элемент Гука, N — вязкий ньютонов элемент, M — вязкоупругое тело Максвелла, K — псевдовязкое тело Кельвина.

соответственно меняется со временем. Уравнение (20.4) при этом записывается в форме

$$s + \dot{s} \frac{\eta_M \mu_K + \eta_M \mu_M + \eta_K \mu_M}{\mu_K \eta_M} + \ddot{s} \frac{\eta_M \eta_K}{\mu_M \mu_K} = 0, \quad (20.5)$$

откуда получим:

$$s = C_1 e^{-t/T_1} + C_2 e^{-t/T_2}, \quad (20.6)$$



где T_1 и T_2 — два времени релаксации, определяемые выражением

$$\frac{1}{T_{1,2}} = \frac{\eta_M \mu_M + \eta_K \mu_M + \eta_M \mu_K \pm \sqrt{\Delta}}{2\eta_K \eta_M}, \quad (20.7)$$

причем

$$\Delta = (\eta_M \mu_M + \eta_K \mu_M + \eta_M \mu_K)^2 - 4\eta_M \eta_K \mu_M \mu_K. \quad (20.8)$$

С другой стороны, если деформация достигла некоторого значения d_0 и нагрузка была снята в момент $t=0$, $s = \dot{s} = 0$ и уравнение (20.4) принимает вид

$$\dot{d} + \frac{\eta_K}{\mu_K} \dot{d} = 0, \quad (20.9)$$

откуда

$$d + \frac{\eta_K}{\mu_K} \dot{d} = C. \quad (20.10)$$

Подставляя условие $s = \dot{s} = 0$ в уравнение (20.3), находим:

$$\dot{d} = -\frac{\mu_K}{\eta_K} e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} d_{0K} \quad (20.11)$$

и, далее,

$$d = (e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} - 1) d_{0K} + d_0. \quad (20.12)$$

Константа C из уравнения (20.10) равна

$$C = d_0 - d_{0K}. \quad (20.13)$$

Деформация d_0 при $t=0$ постепенно уменьшается до $d_0 - d_{0K}$ при $t=\infty$, причем время упругого последствия составляет

$$T_{\text{rel}} = \frac{\eta_K}{\mu_K}. \quad (20.14)$$

Тело Бюргера применимо, например, для описания реологического поведения цементного камня. Численные значения реологических коэффициентов этого материала примерно следующие: модуль мгновенной упругости $\mu_M \approx 10^{11}$ бар; модуль запаздывающей упругости $\mu_K \approx 2 \cdot 10^{11}$ бар; коэффициент вязкости, определяющий

установившуюся ползучесть, $\eta_M \approx 6 \cdot 10^{17}$ нз; вязкость упругого последствия $3 \cdot 10^{12}$ нз. Таким образом, $T_{\text{ret}} \approx \approx 2$ часа и $T_{\text{rel}} \approx 30$ дней.

Трутон и Ренкин, исследовавшие реологические свойства свинцовой проволоки за пределом упругости, предложили для описания ее поведения модель, реологическая формула которой имеет вид

$$TR = PTh - N = (H \setminus M) - N. \quad (20.15)$$

Тело Трутона и Ренкина эквивалентно телу Бюргерса, так как

$$TR = (H \setminus M) - N = (H \setminus N) - (H - N) = K - M = Bu; \quad (20.16)$$

но, как и в случае L - и J -тел, внутреннее строение свинца коренным образом отлично от структуры бетона. Поэтому, хотя кривые консистенции имеют для этих тел одну и ту же форму, их параметры получают совершенно различную интерпретацию.

Трутон и Ренкин установили, что их модель качественно описывает реологическое поведение свинца, однако наблюдаются количественные отклонения от экспоненциального закона релаксации. Это типично также и для других тел вследствие наличия «спектров» релаксации (см. § 23, γ).

21. Пластические гели, или тела Шведова. Шведов исследовал реологическое поведение 0,5%-ного раствора желатины, возраст которого был 24 часа, в приборе ротационного типа. Внутренний цилиндр был подвешен на проволоке. Предположим, что верхний конец проволоки повернулся на угол Ω . Если материал между двумя цилиндрами представляет собой упругое тело, то внутренний цилиндр повернется на другой угол, предположим θ . Используя упруго-вязкую аналогию, мы можем из первой формулы (14.24) найти угол θ . При этом получим:

$$\theta = M_z / 4\mu\pi h \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right), \quad (21.1)$$

где M_z — крутящий момент, приложенный к проволоке.

С другой стороны, если материал в зазоре между цилиндрами — ньютонова жидкость, то внутренний ци-

цилиндр будет вращаться сразу же после наложения момента с убывающей скоростью до тех пор, пока не повернется на угол Ω , т. е. до полного исчезновения момента M_z . В третьем случае, когда материал представляет собой жидкость Максвелла, цилиндр не последует сразу за верхним концом проволоки, а в первый момент повернется на угол θ ($< \Omega$); упругое сопротивление жидкости уравновесит крутящий момент проволоки M_z , величина которого равна

$$M_z = (\Omega - \theta) \frac{D}{l}, \quad (21.2)$$

где D — упругость проволоки и l — ее длина.

Полагая $\Omega - \theta = \varphi$, из формулы (21.1) находим:

$$\theta = \frac{D\varphi}{4\mu_l \pi h l \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right)}. \quad (21.3)$$

Из уравнения (21.3) можно определить величину модуля сдвига μ_l :

$$\mu_l = \frac{D\varphi \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right)}{4\pi h \theta l}. \quad (21.4)$$

Однако угол поворота внутреннего цилиндра θ не сохраняется постоянным; наступает релаксация, и цилиндр постепенно следует за проволокой. Релаксацию напряжений при постоянной деформации θ можно исследовать, уменьшая время от времени действующий на проволоку момент так, чтобы величина θ сохраняла постоянное значение.

По результатам испытаний строился график зависимости угла закручивания проволоки φ , определяющего крутящий момент, от времени t . Если материал есть жидкость Максвелла, то кривая $\varphi - t$ экспоненциального типа и напряжение исчезает при $t = \infty$. Шведов, однако, нашел, что в его желатинном растворе релаксация была не такого типа и что материал, по-видимому, постоянно сохранял небольшое остаточное напряжение, т. е. если Ω поддерживалось при постоянном значении, внутренний цилиндр не поворачивался до угла $\theta = \Omega$ или $\varphi = 0$, а сохранялся конечный угол. Вместо формулы (16.6) он получил

следующую:

$$s = \vartheta + (s_0 - \vartheta) e^{-\frac{t}{T_{\text{rel}}}}, \quad (21.5)$$

где ϑ — остаточное напряжение, практически не релаксирующее. Подобные наблюдения были сделаны Гатчеком и Джейном ¹⁾ на ряде других растворов. Это свидетельствует о том, что такого рода материалы не являются

жидкостями, хотя они выглядят ими, а пластическими твердыми телами. Они могут рассматриваться как пластические гели.

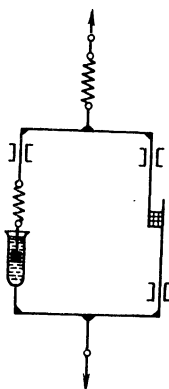
Чтобы представить такие материалы, постулируем тело Шведова, построенное из трех элементов в соответствии со структурной формулой

$$Schw = (M | StV) - H. \quad (21.6)$$

Модель этого тела изображена на рис. 23. Ее реологическое уравнение есть

$$2\dot{d} = \frac{(s - \vartheta)}{\eta_{pl}} + \frac{\dot{s}}{\mu}. \quad (21.7)$$

Рис. 23. Схема модели тела Шведова (*Schw*-тела) $Schw = H - (M | StV)$.



Недавно советские ученые заявили, что приоритет в этой области принадлежит Шведову, а не Бингаму ²⁾.

22. Мучное тесто как пример сложного тела. Как пример материала, реологическое уравнение которого отыскивалось с помощью механической модели, качественно воспроизводящей его реологическое поведение, назовем мучное тесто. Для описания его поведения требуется наиболее сложная из известных до сих пор комбинация элементов.

Реологические свойства теста были обстоятельно изучены Шофилдом и Скотт-Блером ³⁾. В их исследованиях длинные цилиндрические образцы теста растягивались

¹⁾ Hatzscek E., Jane R. S., Kolloid.-Z. 40, 53—58 (1926).

²⁾ Тябин Н. В., Коллоид. журн. 11, 438—441 (1949).

³⁾ Schofield R. K., Scott Blair G. W., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 138, 707 (1932); 139, 557 (1933); 141, 72 (1933); 160, 87 (1937).

в течение одной минуты; после этого периода цилиндры отрезались и оставались свободными. Было установлено, что часть удлинения была обратимой, а часть остаточной (рис. 24). Это показало, что мучное тесто (FD) ¹⁾ не является идеальным телом Гука, хотя и включает гуков элемент.

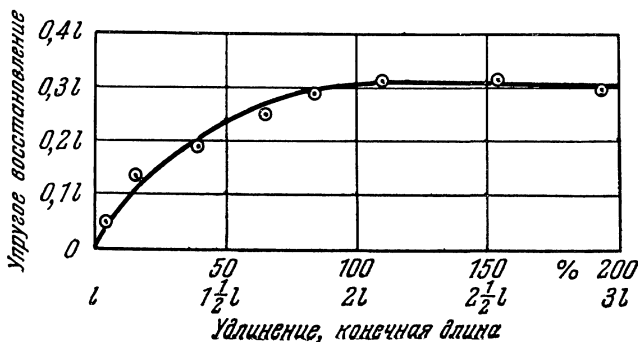


Рис. 24. Деформация упругого последействия при возврате (упругое восстановление) теста как функция удлинения.

Учитывая необратимую составляющую полной деформации, мы в первом приближении можем записать формулу теста в виде $FD = H - X$, где X — другой элемент или элементы, которые должны быть найдены из дальнейших экспериментов.

В следующей серии экспериментов было найдено, что упругий возврат уменьшается по мере роста продолжительности пребывания образца под нагрузкой по экспоненциальному закону (рис. 25). Это явление наблюдается при релаксации тела Максвелла, и поэтому мы можем рассматривать формулу $FD = H - N = M$ как второе приближение. Дальнейшие опыты, в которых исследовалось уменьшение напряжений в растянутых образцах теста, подтвердили закон релаксации, соответствующий этой модели (рис. 26).

В другой статье Шофилда и Скотт-Блера описываются исследования удлинения цилиндрических образцов теста, подвешенных вертикально, в зависимости от напряжения, вызванного действием собственного веса, при различной

¹⁾ От англ. flour-dough — мучное тесто. (Прим. ред.)

продолжительности опыта. Напряжение в некоторой точке зависело от веса части образца, находящейся ниже.

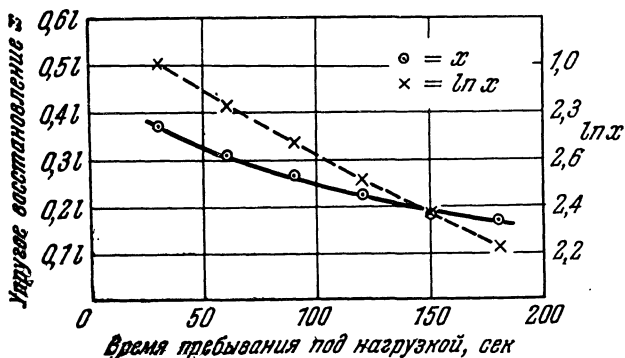


Рис. 25. Деформация упругого последствия (упругое восстановление) теста как функция времени пребывания под нагрузкой.

Было найдено, что скорость удлинения в общем уменьшается с убыванием напряжения и что существует *конечное*

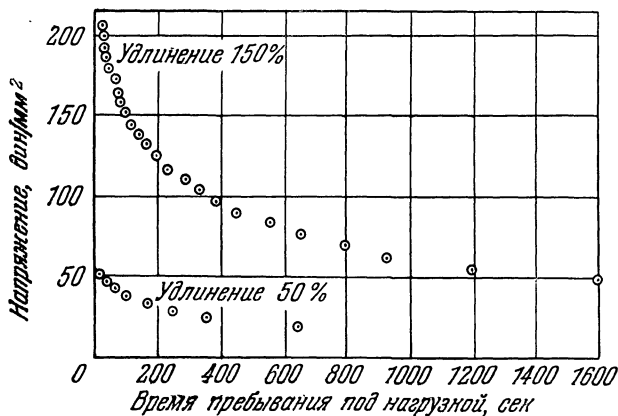


Рис. 26. Релаксация напряжений в тесте.

напряжение, при котором скорость удлинения равна нулю, т. е. в действительности существует предел текуче-

сти. Это показывает, что далее должен быть добавлен элемент Сен-Венана и в третьем приближении $FD = M | StV$. Однако было замечено, что «часто протекает значительное время между снятием напряжения и прекращением укорочения». Это указывает на упругое последствие, исследованию которого посвящено третье сообщение авторов ¹⁾.

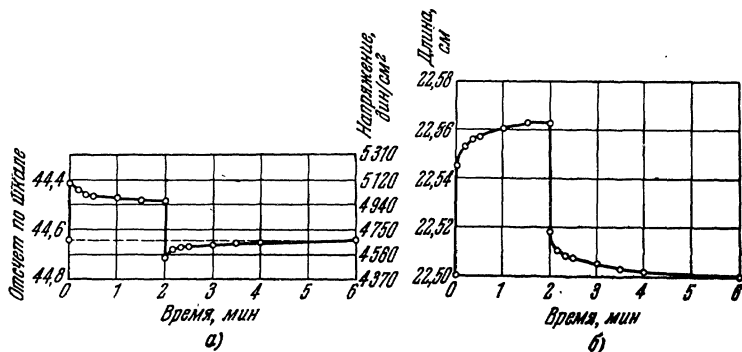


Рис. 27. Эффекты упругого последствия в тесте.

Для описания процессов последствия к модели тела необходимо добавить элемент K . Так как структурная формула FD содержит StV -элемент, возникает вопрос; к какому концу StV -элемента должно быть присоединено K -тело? Опыты (рис. 27) показали, что упругое последствие проявляется при деформировании ниже предела текучести. Это означает, что K -тело должно быть связано с концом пружины. Оно могло бы быть введено путем параллельного соединения пружины с N -элементом. Однако этот же самый рисунок иллюстрирует, что кроме задержанного упругого восстановления существует также «одно-временное» восстановление, т. е. пружина при элементе Сен-Венана не ослабляется во время работы, и поэтому K -тело присоединяется к ней последовательно. В четвертом приближении получаем соответственно формулу ²⁾

$$Sch ScB = (M | StV) - K = Schw | N. \quad (22.1)$$

¹⁾ См. стр. 80. (Прим. ред.)

²⁾ Следует отметить, что положение $Sch ScB$ -тела в таблице 4 противоречит структурной формуле (22.1). $Sch ScB$ -тело расположено в таблице 4 на шестой строке и должно быть составлено,

Рис. 28 подтверждает эту формулу при деформировании за пределом текучести. Таким образом, формула (22.1) обобщает результаты всех наблюдений, выполненных Шофилдом и Скотт-Блером.

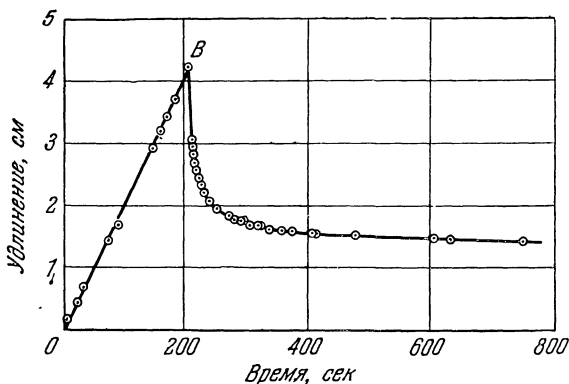


Рис. 28. Деформации теста при напряжениях выше предела текучести.

С помощью реологической формулы (22.1) мы получим реологическое уравнение Шофилда — Скотт-Блера, заменив в уравнении (20.3) s на $s - \vartheta$ и подставив η_{pl} вместо η_M :

$$2\dot{d} = (s - \vartheta) \frac{\eta_{pl} + \eta_K}{\eta_{pl}\eta_K} + \frac{\dot{s}}{\mu_M} - \frac{\mu_K}{\eta_K} e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} \left[2d_{0K} + \frac{1}{\eta_K} \int_0^t (s - \vartheta) e^{\frac{\mu_K}{\eta_K} t} dt \right]. \quad (22.2)$$

Уравнение (22.2) можно упростить дифференцированием и исключением выражения в квадратных скобках. При этом получим:

$$2\dot{d} + 2\ddot{d} \frac{\eta_K}{\mu_K} = \frac{s - \vartheta}{\eta_{pl}} + \dot{s} \frac{\eta_{pl}\mu_K + \eta_{pl}\mu_M + \eta_K\mu_M}{\eta_{pl}\mu_K\mu_M} + \ddot{s} \frac{\eta_K}{\mu_M\mu_K}. \quad (22.3)$$

таким образом, из шести элементов. Между тем, как видно из формул (22.1) и (22.4), оно состоит лишь из пяти элементов. (Прим. ред.)

Формула (22.1) может быть записана в виде

$$FD = Schw | N = (H - B) | N. \quad (22.4)$$

Таким образом, модель мучного теста содержит элемент Бингама. В некоторых опытах, проводимых по методике, отличной от описанной Шофилдом и Скотт-Блером, элемент Бингама проявлялся значительно сильнее, чем H - и K -элементы. Например, Воларович и Самарина исследовали установившееся течение мучного теста в ротационном пластометре с коаксиальными цилиндрами и установили применимость уравнения (14.24). Упругие же свойства материала в их приборе не могли быть определены.

Не следует, однако, думать, что мучное тесто является реологически самым сложным материалом из числа когда-либо исследованных. Такое мнение может возникнуть как следствие того факта, что тесто было изучено со многих различных точек зрения вследствие простоты постановки опыта. Как уже отмечалось в § 13, можно считать аксиомой реологии положение о том, что каждый материал обладает всеми реологическими свойствами, хотя и в различной степени. Представления о гуковой упругости, ньютоновой вязкости и т. д. являются абстрактными; но они совершенно необходимы в тех случаях, когда рассматривается какое-то одно свойство материала. С помощью изложенного здесь *аналитического метода* постулируются идеальные тела H , N , M , K и т. д., причем модель реального материала рассматривается как некоторая комбинация из этих элементов.

Следует отметить, что свойства K -, M -, L -, J -, PTh -, B - и $Schw$ -тел можно определять с помощью специальных терминов, таких, как «запаздывающая упругость», «упруго-вязкость» и т. д. Эта терминология терпит неудачу, когда речь идет о таких сложных телах, как тело $Sch ScB$, и, таким образом, мы оказываемся отброшенными назад к той системе обозначений, которая описана в § 6. Даже если соответствующий термин имеется, удобнее, например, говорить о M -, Vi - и K -телах, чем пытаться делать различие между упруго-вязкостью, вязко-упругостью и псевдо-вязкостью.

23. Более сложные тела. а) *Обобщенное линейное тело.* Хоэнэмзер и Прагер¹⁾ постулировали обобщенное линейное тело с реологическим уравнением

$$a_0 + a_1 s + a_2 \dot{s} + a_3 d + a_4 \dot{d} = 0. \quad (23.1)$$

Это уравнение можно переписать следующим образом²⁾:

$$(s - \vartheta) + T_{\text{rel}} \dot{s} = 2\mu d + 2\eta \dot{d} = 2\mu (d + T_{\text{ret}} \dot{d}). \quad (23.2)$$

Полагая некоторые из коэффициентов этого уравнения равными нулю, мы получаем *H*-, *N*-, *StV*-, *M*-, *K*-, *B*-тела как частные случаи.

Ирме³⁾ ввел так называемый фактор времени *T*, являющийся безразмерным параметром:

$$T = \frac{T_{\text{rel}}}{T_{\text{ret}}}. \quad (23.3)$$

Линейные тела классифицируются им следующим образом (ϑ не принимается во внимание):

(i) *гомותרмические* тела с $T=1$, у которых, как и у тел Гука, не происходит диссипации энергии при циклической нагрузке;

(ii) *экзотермические* тела с $T < 1$, упругая деформация у которых бывает меньше, чем у гомотермических тел, и часть энергии рассеивается. Такими телами являются *N*-, *K*- и *M*-тела.

К этим телам он добавляет также

(iii) *эндотермические*⁴⁾ тела с $T > 1$, упругая деформация у которых бывает больше, чем у гомотермических тел, и сопровождается *выигрышем* энергии. Чтобы это положение не противоречило второму принципу термодинамики, он предположил, что этот выигрыш энергии компенсируется изменениями внутренней структуры тела, а также показал, что сложные полиэлектролиты могут вести

¹⁾ Hohenemser K., Prager W., J. Rheol. 3, 16—22 (1932).

²⁾ Следует отметить, что это уравнение не имеет достаточно общего вида для описания *Sch SchB*-тела.

³⁾ Irmay S., Quart. J. Mech. Appl. Math. 7, 399—409 (1954).

⁴⁾ Этот термин введен по аналогии с «эндотермическими реакциями» для обозначения отрицательной вязкости.

себя эндотермически. Если $T_{\text{ret}} \rightarrow 0$ и $T_{\text{rel}} \rightarrow \infty$, получим реологическое уравнение

$$\dot{s} = \frac{2d}{\eta}. \quad (23.4)$$

β) *Наложение простых тел.* Сложные тела, являющиеся комбинацией простых, образуют «семейство», представленное в таблице 4. Даже простейшие случаи могут представлять комбинации тел того же самого рода. Совершенно очевидно, что последовательное или параллельное соединение H -тел не меняет их реологического характера. То же самое относится к телам Ньютона и Сен-Венана. Положение меняется, если мы подходим таким же образом ко вторым «гомологам»¹⁾ M -, P - и K -тел. Как будет показано ниже, эти тела при последовательном или параллельном соединении ведут себя различным образом.

Рассматривая M -комплекс

$$M = M_1 - M_2, \quad (23.5)$$

мы должны складывать скорости деформации. Из (16.2) имеем:

$$\dot{d} = \dot{s} \left(\frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} \right) + s \left(\frac{1}{2\eta_1} + \frac{1}{2\eta_2} \right) = \frac{\dot{s}}{2\mu} + \frac{\dot{s}}{2\eta}, \quad (23.6)$$

где

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}, \quad \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}. \quad (23.7)$$

Следовательно, несколько M -тел, соединенных последовательно, эквивалентны одному M -комплексу, причем их коэффициенты упругости²⁾ и текучести суммируются.

Существенно отличен от описанного случая

$$M = M_1 | M_2. \quad (23.8)$$

¹⁾ Гомолог (от греч. homologia — согласие) — представитель какого-либо гомологического ряда (г. р.). В органической химии г. р. — группа органических соединений, отдельные члены которых отличаются друг от друга группой CH_2 . Здесь гомологи отличаются друг от друга наличием однородных групп. Например, тело, реологическая формула которого $M_1 | M_2$, является гомологом тела M , и т. д. (*Прим. ред.*)

²⁾ Коэффициент упругости есть величина, обратная модулю упругости.

В соответствии с формулой (23.8) начальные деформации элементов M_1 и M_2 равны и при $t=0$ составляют d_0 . Отсюда

$$s_{01} = 2\mu_1 d_0, \quad s_{02} = 2\mu_2 d_0. \quad (23.9)$$

Складывая напряжения, из соотношений (16.4) и (23.9) находим:

$$s = 2\dot{d}_c (\eta_1 + \eta_2) + 2e^{-\frac{\mu_1}{\eta_1} t} (\mu_1 d_0 - \eta_1 \dot{d}_c) + 2e^{-\frac{\mu_2}{\eta_2} t} (\mu_2 d_0 - \eta_2 \dot{d}_c). \quad (23.10)$$

Мы можем задать скорость деформации, определяемую зависимостью

$$\dot{d}_c = \frac{\mu}{\eta} d_0, \quad (23.11)$$

таким образом, чтобы второй или третий член уравнения (23.10) равнялся нулю. Однако оба эти члена могут исчезнуть лишь в том случае, если оба составляющих M -комплекса будут иметь *одно и то же время релаксации* $T_{\text{rel}} = \eta_1/\mu_1 = \eta_2/\mu_2$. Следовательно, в общем случае мы не можем деформировать тело с постоянной скоростью так, чтобы и напряжения сохранялись постоянными, как в случае отдельного M -тела. Наоборот, при постоянном напряжении материал не может течь с постоянной скоростью. Другими словами, такое тело не может находиться в состоянии установившегося вязкого течения, какое возможно для жидкости Максвелла. Таким образом, мы установили, что несколько последовательно соединенных M -тел ведут себя, как одно M -тело; соединенные же параллельно, они не следуют экспоненциальному закону релаксации, а более сложному, т. е. фактически ведут себя, как M -тело с переменным T_{rel} ¹⁾. Аналогично несколько K -тел, соединенных параллельно, ведут себя, как одно K -тело, но, будучи соединены последовательно, они не следуют экспоненциальному закону последействия, но более сложному, т. е. ведут себя, как одно K -тело с переменным временем последействия. Переменные реологические параметры рассматриваются нами в § 26. Здесь мы отметим только, что

¹⁾ Это, по-видимому, объясняет результаты Трутона и Ренкина, см. конец § 20; см. также Kubát, Kolloid-Z. 134, 205 (1953).

первые попытки описания реологического поведения высокополимеров и других материалов с помощью переменных параметров уступили место теориям, основанным на *принципе наложения*. Последний был вначале сформулирован как некоторая эвристическая попытка и только теперь рассматривается как математическое выражение гипотезы о линейности вязко-упругого поведения ¹⁾.

γ) *Спектры отдельных тел*. В этих теориях вязко-упругости рассматриваются эффекты двоякого рода: к 1-й группе относятся эффекты ползучести при постоянном напряжении и ко 2-й группе — эффекты релаксации при постоянной деформации. Возникают два типа теоретических зависимостей. Один тип зависимостей описывает явления лишь одной группы, а второй — явления, относящиеся к различным группам. При интерпретации результатов используется представление о *непрерывном спектре* экспоненциальных функций, временные константы которых непрерывно распределены в пределах конечного или бесконечного промежутка. Таким образом, вводятся две функции распределения, а именно: *спектр времен последствия*, относящийся к группе 1, и *спектр времен релаксации*, соответствующий группе 2. Форма функции распределения является характеристикой реологических свойств материала. Общие соотношения между этими двумя распределениями были установлены независимо Гроссом ²⁾ и Куном ³⁾.

Эти теории, важные для описания и понимания реологического поведения высокополимеров, детально рассмотрены в т. XIII «Handbuch der Physik» ⁴⁾.

δ) *Интеграторный метод*. Иногда число элементов, составляющих модель, увеличивается настолько же, как

¹⁾ Gross (1953).

²⁾ Gross B., Phys. Rev. 71, 144 (1947).

³⁾ Kuhn W., Kunzle O., Preissmann H., Helv. chim. Acta 30, 307, 464 (1947).

⁴⁾ См. также § 20 статьи Freudenthal A., Geiringer H. in «Handbuch der Physik», Bd. VI, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1958, 229 — 433 [русский перевод: Фройденцаль А., Гейрингер Х., Математические теории неупругой сплошной среды, Физматгиз, М., 1962. (Прим. ред.)], а также главы Ставермана и Шварцля в книге под редакцией Стюарта (1956).

и в случае *Sch ScB*-тела, а материал даже и тогда не следует количественно реологическому уравнению, предложенному для идеального тела, так что приходится привлекать весь спектр, т. е. бесконечное множество тел; в этих случаях Скотт-Блер (1949) предлагает другой подход, который он назвал *интеграторным методом*¹⁾. Для описания поведения тел, промежуточных между гелевым телом, которое соответствует уравнению (10.1) ($s=2\mu\epsilon$), ньютоновой жидкостью с уравнением (11.1) ($s=2\eta f$) и жидкостью Паскаля, им была введена величина

$$\Psi = s^\beta d^{-1} t^k, \quad (23.12)$$

причем Ψ становится коэффициентом вязкости, когда $\beta=1$ и $k=1$, и модулем упругости, если $\beta=1$ и $k=0$, а также подходит и для описания более сложного поведения, даже если β и k имеют указанные выше частные значения. Уравнение (23.12) было предложено Наттингом и независимо от него Скотт-Блером и известно как *уравнение Наттинга — Скотт-Блера*. В том виде, как приведено выше, его применение ограничивается случаями постоянного напряжения или постоянной деформации. Хотя оно явно содержит время, дифференцируя по времени, можно исключить t из исходного и продифференцированного уравнений. В результате для постоянного Ψ получаем:

$$\frac{\dot{d}}{d} - \beta \frac{\dot{s}}{s} = k \left(\frac{s^\beta}{d\Psi} \right)^{1/k}. \quad (23.13)$$

Это уравнение можно применять, когда меняются как напряжение, так и деформация.

Уравнение Наттинга — Скотт-Блера не претендует на выражение физического закона, и свойства, которые оно отражает, являются «квазисвойствами». Параметры β и k свидетельствуют о некоторых изменениях реологических свойств, протекающих в материале в результате того или иного процесса. Такого рода функции внесли неоценимый вклад в некоторые разделы технологии. Логарифмируя уравнение (23.12), мы получаем так называемую *логарифмическую гомологию* этой кривой. Она представляет собой

¹⁾ В противоположность аналитическому методу, ср. § 22.

прямую линию. Этот эмпирический факт, обнаруженный во многих лабораториях мира, показывает, что результаты наблюдений, нанесенные на график в логарифмических координатах, изображаются отдельными отрезками ломаной линии. Уравнение Наттинга — Скотт-Блера является аналитическим выражением этого эмпирического факта, установленного с помощью графических методов. Например, если кривые течения различных смесей битумов с наполнителями нанести на график в логарифмических координатах, то получим семейство прямых, которые при содержаниях наполнителя вплоть до определенной величины имеют наклон $1 : 1$, при более высоких концентрациях их наклон увеличивается. Это показывает, что при определенной концентрации наполнителя происходит расслоение в системе наполнитель — связующее, вызывающее изменения наклона линий или, соответственно, показателя степени в описывающем их уравнении Наттинга — Скотт-Блера. Таким образом, величина этого показателя является «индикатором» структурных изменений.

Было бы неправильно рассматривать уравнение Наттинга — Скотт-Блера как «реологическое уравнение». Его иногда ошибочно принимают за «степенной закон», о котором будет сказано в § 26. Однако обобщение интеграторного метода, выполненное Скотт-Блером, применившим дифференцирование в частных производных, дает теоретическое обоснование зависимости (23.12).

24. Объемная вязкость. Как отмечалось в § 3, любая деформация может быть представлена в виде суммы деформации объема, или *объемного расширения*, и деформации формоизменения, или *искажения*. Классическая механика сплошных сред, как уже отмечалось в § 7, предполагает, что все материалы, твердые и жидкие, по отношению к деформациям объема ведут себя некоторым весьма вырожденным образом, а именно как идеально упругие тела с (упругим) объемным модулем κ , являющимся единственным реологическим коэффициентом.

Реология имеет, в общем, аналогичную точку зрения по данному вопросу с классической механикой и концентрирует свое внимание на изучении формоизменения, отождествляя течение с искажением, развивающимся во времени. Такие представления являются слишком узкими.

Более детальные исследования показали, что, хотя различные реологические свойства наиболее ярко проявляются при формоизменении, все они имеют место и при объемном сжатии (расширении). Рассматриваемые свойства характеризуются четырьмя коэффициентами, или параметрами, которые могут быть переменными или постоянными величинами. Это (i) *модуль упругости*, (ii) *время последействия*, (iii) *время релаксации* и (iv) *предел текучести* (ϑ). Два «собственных» времени материала связаны с двумя коэффициентами вязкости, а именно: время последействия — с *вязкостью последействия* и время релаксации — с *релаксационной вязкостью*. Все эти коэффициенты существуют попарно, одни из них относятся к формоизменению, другие — к деформациям объема. Первый класс коэффициентов рассматривается в предшествующих §§ 13—23, второй класс — в настоящем параграфе. В теории упругости факт существования парных коэффициентов, т. е. модуля сдвига μ и объемного модуля κ ¹⁾, хорошо известен. Предел текучести при сдвиге фигурирует в телах Сен-Венана и Бингама; в общем случае может существовать и объемный предел текучести, который обозначим ϑ_r .

Из второго закона термодинамики следует, что деформации объема реальных материалов должны сопровождаться силами вязкого сопротивления. Пусть, например, сфера из некоторого материала в результате внезапного снятия давления пришла в состояние свободных колебаний. Колебания объема связаны с упорядоченным радиальным движением всех частиц, т. е. с крайне маловероятным случаем. Поэтому упорядоченное движение постепенно нарушается тепловым и наконец переходит в беспорядочное движение; феноменологически этот процесс представляет собой *вязкое затухание*. Таким образом, мы пришли к понятию *объемной вязкости последействия* ζ_s .

Принимая во внимание, что каждая жидкость имеет объемную упругость, мы можем связать с ней объемную вязкость последействия. В связи с этим реологическое уравнение ньютоновой жидкости можно получить комби-

¹⁾ На ранней стадии развития классической теории упругости Коши и Пуассоном были предприняты попытки установления зависимости между этими двумя величинами с целью сведения их к одному параметру, которые, однако, потерпели неудачу.

нацией соотношений (11.1) и (15.6). Поэтому вместо (11.2) получим зависимость

$$s_{lm} = (\kappa \epsilon_v + \dot{\zeta}_s \epsilon_v) \delta_{lm} + 2\eta f_{lm}. \quad (24.1)$$

Если не делается различия между упругими и вязкими деформациями, которые обозначаются знаком d_{lm} в соответствии с (3.8) и (3.10), то, заменяя формулу (22.1) уравнением

$$s_{lm} = (\kappa d_{\alpha\alpha} + \dot{\zeta}_s \overline{d_{\alpha\alpha}}) \delta_{lm} + 2\eta \overline{d_{lm}}, \quad (24.2)$$

найдем, что

$$s_{\alpha\alpha} = -3p_m = 3\kappa d_{\alpha\alpha} + (3\dot{\zeta}_s + 2\eta) \overline{d_{\alpha\alpha}}. \quad (24.3)$$

Если среднее давление p_m равно статическому давлению p , то $3\dot{\zeta}_s + 2\eta = 0$, и мы имеем так называемое уравнение Стокса. Это название основано на недоразумении, так как формула Стокса выведена с учетом того, что $f_{\alpha\alpha} \neq 0$. Величина $f_{\alpha\alpha} = f_v \neq 0$ связана с *объемным течением*, т. е. с протекающим во времени непрерывным всесторонним расширением (положительным или отрицательным) под действием постоянного всестороннего напряжения. Такое объемное течение не рассматривалось Стоксом. Для классической ньютоновой жидкости $\dot{\zeta}_s$ полагают равной нулю. Эта точка зрения изложена в большей части учебников гидродинамики. Однако из наблюдений главным образом затухания ультразвуковых волн стало очевидным, что величина $\dot{\zeta}_s$ должна быть весьма большой. Карим и Розенхед ¹⁾ дали обзор причин существования конечного «второго» коэффициента вязкости в жидкостях и газах. Этот второй коэффициент вязкости связан с упругими деформациями, но не с течением, и если он не равен нулю, то можно считать, что модель тела Кельвина описывает объемную деформируемость ньютоновой жидкости. Для этого случая применимы уравнения § 15, в которых вместо μ должно быть κ и вместо η $\dot{\zeta}_s$. Существует также время (объемного) последействия

$$T_{\text{ret}} = \frac{\dot{\zeta}_s}{\kappa}. \quad (24.4)$$

¹⁾ Karim S. M., Rosenhead L., Rev. Mod. Phys. 24, 108 (1952).

Таким образом, упругая реакция на всестороннее давление является запаздывающей, что обуславливает затухание свободных колебаний при деформациях объема, механизм которого описан выше.

Рейнер ¹⁾ указывал, что в общем случае может существовать второй коэффициент вязкости, связанный с объемным течением. Он может быть назван *релаксационной объемной вязкостью*, обозначается ζ_l и, по аналогии с (9.1), определяется уравнением

$$f_v = f_{\alpha\alpha} = -\frac{Pm}{\zeta_l}. \quad (24.5)$$

Объемное течение f_v представляет собой непрерывное всестороннее расширение, вызывающее изменение плотности материала во времени при постоянном всестороннем напряжении. Положительное объемное течение было обнаружено Ли, Рейнером и Ригденом ²⁾ в асфальтах и количественно описано Рейнером, Ригденом и Сроуэром ³⁾; отрицательное течение при деформациях наблюдалось Гленвиллом и Томасом ⁴⁾ в бетонах (см. также Рейнер ⁵⁾). Босуёрс ⁶⁾ наблюдал такое течение в твердой двуокиси углерода при всестороннем давлении, растяжении и кручении. Следует иметь в виду, что с точки зрения реологии эти материалы могут рассматриваться как жидкости (даже если они обладают упругостью формы), порядок величины их сдвиговой вязкости составляет соответственно 10^{12} , 10^{17} и 10^{10} пз. Из закона сохранения массы со всей очевидностью следует, что положительное течение при деформациях объема связано с увеличением и отрицательное течение — с уменьшением объема пустот в материале. По Эйрингу ⁷⁾ «жидкость есть бинарная смесь молекул и пор». У всех перечисленных материалов поры занимают значительный объем, в связи с чем течение при деформа-

¹⁾ Reiner M., Appl. Sci. Res. A 1, 475 (1949).

²⁾ Lee A. R., Reiner M., Rigden P., Nature 158, 706 (1946).

³⁾ Reiner M., Rigden P., Thrower E. N., J. Soc. Chem. Ind. 69, 257 (1950).

⁴⁾ Glanville W. H., Thomas F. C., Building Research Technical Papers, № 21 (1939).

⁵⁾ Reiner M., Appl. Sci. Res. A 1, 475 (1949).

⁶⁾ Bosworth R. C. L., Austral. J. Res. A 2, 394—404 (1949).

⁷⁾ Eyring H., J. Chem. Phys. 4, 283 (1936).

циях объема бывает ярко выражено. Газы при взрывах также обнаруживают эффект течения при деформациях объема. Если изотропное напряжение сохраняется постоянным, то как положительное, так и отрицательное течение при деформации объема со временем заканчивается; в первом случае это приводит к разрушению или к максимальному разрежению, а во втором — к максимальному сжатию, причем величина ζ_l в этом случае не может быть постоянной. Тем не менее характер процесса как течения сохраняется, хотя оно может продолжаться в течение геологических периодов.

По тем же причинам, что и для формулы (10.6), существует зависимость между коэффициентом вязкого растяжения Трутона λ_T , ζ_l и η , вид которой

$$\lambda_T = \frac{9\zeta_l\eta}{3\zeta_l + \eta}. \quad (24.6)$$

Таким образом, мы должны учитывать различие между двумя коэффициентами вязкости, из которых один (ζ_s) связан с упругими деформациями объема и второй (ζ_l) — с течением. В некоторых случаях они смешиваются¹⁾.

Если материал несжимаем, $\kappa = \infty$ и $e_v = 0$. Аналогично, если течение при деформациях объема отсутствует, $\zeta_l = \infty$, $f_v = 0$. При этом из уравнения (24.6) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_T^* &= 3\eta, \\ \nu_f^* &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (24.6')$$

Если вязкость последействия не проявляется, то $\zeta_s = 0$. Однако нет никаких оснований считать, что течение и упругое последействие при деформациях объема у материалов отсутствуют.

Например, при ламинарном течении объем материала не меняется при любых значениях κ и ζ_l . Стокс, однако, заявляет: «...В большей части случаев, в которых применение теории вязкого течения представляет интерес, плотность жидкости или является постоянной, или может без заметной ошибки приниматься постоянной, или,

¹⁾ Например, в ранних работах Reiner M., Amer. J. Math. 68, 672 (1946); Quart. Appl. Math. 8, 341 (1951).

наконец, плотность медленно меняется с течением времени. В первых двух случаях результаты совпадают и в третьем случае близки к двум первым, независимо от того, равняется ли ζ_s нулю или нет. Следовательно, . . . в этих случаях... можно считать, что опыты подтверждают... теорию, которая предполагает ζ_s равной нулю» (или, добавим, $\zeta_l = \infty$).

Полагая, что при отрицательном течении в случае деформаций объема вещество материала (молекулы Эйринга) втекает в дырки, мы, по-видимому, можем связать величину ζ_l с η . При этом получим теорию течения вязкой жидкости, использующую одну физическую константу. Напомним, что аналогичная попытка для упругих тел была предпринята Коши и Пуассоном ¹⁾.

Если при деформациях объема происходит и течение, и упругое последствие, то полная скорость всестороннего расширения в нагруженном теле является суммой двух скоростей — обратимой и необратимой. В разгруженном теле обратимая упругая деформация может протекать с последствием, а течение отсутствует. Таким образом, имеем:

$$-\dot{e}_v = \frac{p_m}{\zeta_s} - \frac{\kappa}{\zeta_s} e^{-\frac{\kappa t}{\zeta_s}} \left(e_{v,0} + \int \frac{p_m}{\zeta_s} e^{\frac{\kappa t}{\zeta_s}} dt \right). \quad (24.7)$$

Пусть \dot{d}_{lm} — тензор мгновенной скорости деформации; имеем:

$$-\dot{d}_v = -(\dot{e}_v + f_v) = p_m \frac{\zeta_s + \zeta_l}{\zeta_s \zeta_l} - \frac{\kappa}{\zeta_s} e^{-\frac{\kappa t}{\zeta_s}} \left(e_{v,0} + \int \frac{p_m}{\zeta_s} e^{\frac{\kappa t}{\zeta_s}} dt \right). \quad (24.8)$$

Дифференцируя по времени и исключая выражение в скобках, приходим к уравнению

$$p_m + \dot{p}_m \frac{\zeta_s + \zeta_l}{\kappa} = -\zeta_l \dot{d}_v + \frac{\zeta_s}{\kappa} \ddot{d}_v, \quad (24.9)$$

представляющему собой реологическое уравнение вязкой жидкости для деформаций объема.

¹⁾ См. Reiner M., Appl. Sci. Res. A 1, 475 (1949).

Чтобы лучше понять свойства такого тела, предположим, что κ , ζ_s и ζ_l являются константами; при этом полученное уравнение интегрируется просто. Здесь возможна постановка ряда экспериментов.

(i) Пусть тело сжато до такой степени, что его (отрицательная) деформация объема равна $-d_{v,0}$. В момент $t=0$ снимем нагрузку, так что $p_m = \dot{p}_m = 0$. Уравнение (24.9) превращается в линейное дифференциальное уравнение относительно d , двукратное интегрирование которого приводит к формуле

$$d_v - d_{v,\infty} = (d_{v,0} - d_{v,\infty}) e^{-\frac{\kappa t}{\zeta_s}}. \quad (24.10)$$

Величина $d_{v,0} - d_{v,\infty}$ представляет собой асимптотически (при $t = \infty$) стремящуюся к нулю обратимую часть деформации объема и является поэтому упругой деформацией. Возврат происходит с запаздыванием, причем время последнего действия то же, что и при отсутствии объемного течения. Имеется также и необратимая деформация $d_{v,\infty}$.

(ii) Пусть объемное расширение $-d_{v,0}$ поддерживается постоянным и p_m постепенно падает. Так как $\dot{d}_v = \ddot{d}_v = 0$, зависимость (24.9) превращается в линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно p_m , интегрирование которого приводит к выражению

$$p_m = p_{m,0} e^{-\frac{\kappa t}{\zeta_s + \zeta_l}}. \quad (24.11)$$

Напряжение $p_{m,0}$, вызвавшее деформацию $d_{v,0}$, релаксирует, причем время релаксации равно

$$T_{\text{rel}} = \frac{\zeta_s + \zeta_l}{\kappa}. \quad (24.12)$$

Таким образом, уравнение (24.9) может быть записано в виде

$$p_m + \dot{p}_m T_{\text{rel}} = -(\dot{d}_v + \ddot{d}_v T_{\text{rel}}). \quad (24.13)$$

Для жидкости Стокса $\zeta_s = 0$ и $\zeta_l = \infty$, откуда $T_{\text{rel}} = 0$ и $T_{\text{rel}} = \infty$.

Таким образом, тело Бюргерса, рассмотренное в § 20, пригодно и для описания поведения вязкой жидкости при деформациях объема ¹⁾).

25. Недостатки классической теории. Классическая теория, на основе которой излагался предыдущий материал с формулами, собранными в таблице 6, пригодна только для описания явлений первого порядка. Не следует думать, что эффекты первого порядка всегда играют большую роль, чем эффекты второго порядка. Если в выражении $y = ax + bx^2 = ax \left(1 + \frac{a}{b} x \right)$ $\frac{a}{b} x \ll 1$, то y может аппроксимироваться величиной ax . Если $ax/b \approx 1$, то такое приближение приводит к большим погрешностям, в связи с чем необходимо учитывать явления второго порядка. Если же $ax/b \gg 1$, то можно считать $y \approx bx^2$. Не следует забывать, что величина ax/b , играющая здесь роль критерия, является безразмерной величиной. Наконец, нельзя пренебрегать величиной bx^2 , даже при весьма малых x , если первый член правой части этого уравнения отсутствует и $a=0$ ²⁾. С этой точки зрения классическая теория малых деформаций имеет четыре недостатка, каждый из которых является следствием линеаризации соответствующих уравнений. Два из них обусловлены кинематикой и два динамикой явления.

Кинематические недостатки теории обусловлены тем, что уравнения (3.8) и (3.10), устанавливающие меру относительной деформации и скорости деформации, являются линеаризованными. Уравнение (3.8), в частности, предполагает, что градиент перемещений есть бесконечно малая величина. Можно считать, что классическая теория является закономерной и строгой в пределах этих ограничений. Однако совершенно ясно, что градиент перемещений — конечная величина (в связи с этим будем обозначать его Γ_{lm}), а поэтому мы не можем определять относительную деформацию, в соответствии с (3.8), уравнением $D_{lm} =$

¹⁾ Ср. также Oldroyd J. G., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 226, 57—58 (1954).

²⁾ Математически подготовленный читатель пусть извинит за эти тривиальные рассуждения; но на них в реологической литературе очень часто не обращают внимания.

Система реологических уравнений

Таблица 6

Число элементов	Жидкости		Твердые тела	
	Вязкое течение или ползучесть		Пластическое течение	Упругие деформации
1	N $2f = s/\eta$	$\textcircled{1}$	$St V$ $s - \delta = 0$ $2\dot{d} = \lambda_M s$	H $s = 2\mu \dot{\epsilon}$
2	$M = N - H$ $2\dot{\epsilon} = s/\eta + \dot{s}/\mu_L$	$\textcircled{1}$ $\textcircled{1/\mu_L}$	$P = St V - H$ $s - \delta = 0$ $2\dot{d} = \dot{s}/\mu + \lambda_M s$	$\textcircled{1}$ $\textcircled{\eta_s}$ $K = H \setminus N$ $s = 2\mu \dot{\epsilon} - 2\eta_s \dot{\epsilon}$
3	$L = N - K$ $J = N \setminus M$ $S + \dot{s} T_{rel} = 2\eta (d + \dot{d} T_{rel})$ $T_{rel} = \int_{0K}^{\mu_{xt}} \frac{\mu_{xt}}{\eta_K} dt$ $2\dot{d} = s \frac{\eta_N + \eta_K}{\eta_N \eta_K} + \frac{\mu_K}{\mu_M \eta_K} e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} (2d_{0K} + \frac{1}{\eta_K} \int_{0K}^{\mu_{xt}} s e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} dt)$	$\textcircled{1}$ $\textcircled{1/\mu_L}$ $\textcircled{1/\mu_{rel}}$ $\textcircled{1/\eta_{rel}}$	$B = (N \setminus St V) - H$ $2\dot{d} = (s - \delta) \eta_{pl}$	$PTh = H \setminus M$ $s + \dot{s} T_{rel} = 2\mu (e + \dot{\epsilon} T_{rel})$ $s/2 = \mu_H e + e^{-\frac{\mu_H}{\eta_H} t} (\epsilon_0 + \mu_M \int_{0K}^{\mu_{xt}} \dot{\epsilon} e^{-\frac{\mu_H}{\eta_H} t} dt)$ T_{rel}
4	$Bu = M - K$ $TR = N - PTh$	$\textcircled{1/\mu_{tr}}$	$Schw = (M \setminus St V) - H$ $2\dot{d} = (s - \delta) / \eta_{pl} + \dot{s} / \mu$	$K \setminus M$
6		$\textcircled{1}$	$Schw ScB = (M \setminus St V) - K$ $2\dot{d} = (s - \delta) \frac{\eta_{pl} + \eta_K}{\eta_{pl} \eta_K} + \frac{\mu_K}{\mu_M \eta_K} e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} [2d_{0K} - \frac{1}{\eta_K} \int_{0K}^{\mu_{xt}} (s - \delta) e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} dt]$	$\textcircled{1}$ $\textcircled{\eta_K}$ — Соединение последовательное — Соединение параллельное

$= \frac{1}{2} (\Gamma_{lm} + \Gamma_{ml})$, так как это выражение для D_{lm} в общем

случае может давать погрешность, вызываемую вращением. Как будет показано далее, любое точное выражение для D_{lm} содержит высшие степени Γ_{lm} или произведения $\Gamma_{l\alpha}\Gamma_{\alpha m}$. При определении конечной деформации D_{lm} как функции Γ_{lm} по соответствующей формуле для малых деформаций произведения этих членов обычно отбрасываются, как бесконечно малые высших порядков. Однако, как уже отмечалось выше, это возможно только в том случае, если члены первого порядка не равны нулю. Если же они отсутствуют, то произведениями $\gamma_{l\alpha}\gamma_{\alpha m}$ пренебрегать нельзя. Как показано в § 29, этот случай имеет место при вращении главных осей, например при простом сдвиге. При этом эффекты второго порядка проявляются даже при малых упругих деформациях, что ограничивает область применения классической теории, которая пригодна только для чистых деформаций (т. е. без вращения).

Второй кинематический дефект относится к уравнению (3.10) и вызван теми же причинами. В соответствии с (3.10)

$f_{lm} = \dot{\bar{d}}_{lm}$. Таким образом, величина f_{lm} содержит те же погрешности, обусловленные явлениями второго порядка, что и \bar{d}_{lm} , применяемая вместо D_{lm} . Рассматривая течение как *скорость относительной деформации*, мы должны иметь в виду только *конечные деформации*. Рассматривать бесконечно малые деформации жидкости — значит ограничиться только бесконечно малыми колебаниями и не учитывать реального течения. Если же имеет место течение, то деформация будет конечной, и поэтому уравнение (3.10) является в общем случае неточным. Это следует себе ясно представлять.

Рассмотрим струйное течение материала. Выделим вокруг линии тока вязкой жидкости цилиндрический элемент, длина l которого непрерывно увеличивается при течении. Пусть начало координатной системы совпадает с одним из оснований этого цилиндра, а другое основание перемещается в этой координатной системе со скоростью v_l , причем поле скоростей является однородным и $v_x = v_l x/l$, где $v_l = dl/dt$. В соответствии с представлениями классической гидродинамики, скорость относительного

удлинения, определяющая вязкое сопротивление движению, равна $f_l = v_l/l$. Подставляя выражение для l , приведенное выше, получим:

$$f_l = \frac{\left(\frac{dl}{dt}\right)}{l} = \frac{\left(\frac{dl}{l}\right)}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{l}{l_0}\right),$$

где l_0 — начальная длина цилиндра в момент времени $t = 0$. Если течение неоднородно, то мы можем выделить элемент линии тока, скажем dx , крайние точки которого движутся со скоростями v_x и $v_{x+dx} = v_x + (dv_x/dx) dx$. Относительная скорость при этом (соответствующая прежней v_l) равна $(dv_x/dx) dx$ и $f_{xx} = dv_x/dx = v_{x,x}$. Методом, изложенным выше, найдем, что $f_{xx} = d[\ln(\delta x_1/\delta x_0)]/dt$, где δx_0 и δx_1 — значения dx соответственно для $t=0$ и $t=t$. Но $\delta x_1 = \delta x_0 + u_x(x_0 + \delta x_0, dt) - u_x(x_0, dt)$, где $u_x(x_0, t)$ — относительное перемещение, являющееся функцией начальной координаты и времени. Пренебрегая членами второго и последующих порядков (и полагая $u_{x,x} \neq 0$) по сравнению с членами первого порядка, можем записать $\delta x_1 = \delta x_0 + u_{x,x}(x_0, 0) \delta x_0$ и $f_{xx} = \frac{d}{dt} [\ln(1 + u_{x,x})] = \frac{d}{dt} \times \ln(1 + \Gamma_{xx})$. Только в тех случаях, когда градиент перемещений бесконечно мал, мы, используя разложение в ряд

$$d_{xx} = \ln(1 + \Gamma_{xx}) = \Gamma_{xx} - \frac{\Gamma_{xx}^2}{2} + \dots, \quad (25.1)$$

можем вычислить деформации по Коши из уравнения (3.8). Если же градиент перемещений является конечным, как в случае любого реального вязкого или пластического течения, мерой деформации является логарифмическая деформация, установленная Хенки¹⁾ и определяемая формулой

$$D = \ln \left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (25.2)$$

вместо

$$D = \frac{l}{l_0} - 1. \quad (25.3)$$

¹⁾ Более подробно об этой мере деформации сказано ниже, в § 29.

Отсюда получим уравнение

$$f_l = \frac{d}{dt} (D_l^H), \quad (25.4)$$

которое оправдывает название «скорость деформации» для величины f_{lm} . Определение скорости деформации по формуле (25.4) влечет за собой некоторые следствия, рассматриваемые в §§ 34 и 45.

Два других недостатка обусловлены линеаризацией реологического уравнения (6.1), как, например, в (22.1). Предполагается, что коэффициенты в этом уравнении являются постоянными величинами. Диаграммы напряжение — деформация и напряжение — скорость деформации при этом прямые линии. Если это положение не подтверждается экспериментом, как, например, в случае высокополимеров, то можно применять два метода. Во-первых, можно считать, что коэффициенты реологических уравнений не являются постоянными. Здесь мы имеем дело с так называемой *физической нелинейностью*. Второй метод допускает применение различных мер деформации, которые являются нелинейными функциями градиента перемещений и подбираются так, чтобы реологические коэффициенты были постоянными. Это так называемая *геометрическая нелинейность*.

Второй недостаток приведенных динамических зависимостей напряжений от деформаций заключается в том, что в уравнении (22.1), наиболее типичном из всех реологических уравнений, обсуждавшихся в главе В, I, содержатся тензоры только первых степеней (например, d_{lm} и т. д.). Это может быть названо тензорной линейностью или квазилинейностью. В § 7, однако, показано, что любые изотропные соотношения между тензорами второго ранга содержат вторые степени вида $t_{la}t_{am}$ тензоров t_{lm} . Если мы включим их в реологические уравнения, то получим так называемую *тензорную нелинейность*.

Учет ошибок классической теории, обусловленных физической, геометрической и тензорной нелинейностью, приводит нас к рассмотрению явлений второго и последующих порядков. Последние обсуждаются в следующей главе В, II.

II. Явления высших порядков

26. Физическая нелинейность в упругости. *а) Физическая нелинейность в общем случае.* В предыдущем разделе реологические коэффициенты — модули упругости, коэффициенты вязкости, времена релаксации и т. д. — считались константами. Хотя их численные значения, без сомнения, зависят от физических параметров, например температуры, электрического заряда и т. д., исследование которых не входит в разделы реологии, их считают тем не менее независимыми от реологических переменных. Такие представления не точны. Во-первых, известно, что реологические коэффициенты (μ , η и т. д.) зависят от всестороннего давления (или растягивающего напряжения), под действием которого материал находится, или, что то же, его плотности или объемного расширения. Объемное расширение представляет собой инвариант деформации. Если деформация бесконечно мала, то, как отмечалось в § 3, объемное расширение представляет собой *первый инвариант*. Реологические коэффициенты изотропного и квазиизотропного материала, являющиеся параметрами реологических уравнений, представляют собой *скалярные величины*. Следовательно, если они являются переменными, то могут быть функциями тензоров напряжений и деформаций только через посредство их скалярных инвариантов. Главные инварианты определяются соотношениями (7.12) и (7.15). Подставляя в них s , d , f или D вместо t , получим соответствующие выражения для инвариантов тензоров напряжений, деформации и скорости деформации. Можно сказать, что любой реологический коэффициент всегда является функцией первых инвариантов тензоров напряжений и деформации и зависящей от них плотности, а также функцией второго и третьего инвариантов их девиаторов. Мы можем исследовать влияние последних двух инвариантов на реологические параметры, если учтем их зависимость от давления или плотности с помощью табличных данных или эмпирических формул.

При чисто формальном математическом подходе мы можем считать инварианты девиаторов напряжений и деформации аргументами, функциями которых являются

реологические коэффициенты. При физическом рассмотрении можно в целях лучшего понимания задачи использовать так называемые совместные инварианты Трусделла (1952)

$$J(s, \dot{d}) = s_{\alpha\beta} \dot{d}_{\alpha\beta}, \quad J(s, f) = s_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}, \quad (26.1)$$

которые равны удельной мощности напряжений и, следовательно, имеют непосредственный физический смысл. При построении теорий физической нелинейности можно полагать, что изменение реологических коэффициентов в ходе или вследствие деформации вызывается изменением микроструктуры материала. Так как система при этом выходит из положения равновесия, в котором она имела минимум внутренней энергии, то такое изменение структуры требует затраты работы. Так как эта работа затрачивается в течение некоторого промежутка времени, сравнимого с временем релаксации, можно считать, что определяющей величиной¹⁾ является удельная мощность напряжений. Если предположить, что вся работа изотропной компоненты тензора напряжений накапливается в виде упругой потенциальной энергии, то изменение структуры материала, и следовательно изменение его реологических коэффициентов, может происходить только вследствие мощности формоизменения. Для примера рассмотрим некоторый реологический коэффициент M . Последний имеет два значения, одно из которых материал имеет в естественном состоянии, т. е. при отсутствии деформаций в случае упругого тела или в состоянии покоя в случае вязкой жидкости. Обозначим это первое значение M_0 . Другое значение величины M при максимальном отклонении от начального, которое было вызвано крайне большой мощностью напряжений, обозначим через M_∞ . Величина M может меняться от M_0 до M_∞ более или менее плавно в соответствии с коэффициентом устойчивости χ .

Состояние структуры тела при некотором значении $w_{(0)}$ определяется величиной $M_\infty - M$, причем χ может

¹⁾ Под определяемыми величинами здесь понимаются реологические параметры, как, например, коэффициент вязкости и другие. (Прим. ред.)

быть найдено из уравнения

$$\chi = \frac{M_{\infty} - M}{\frac{dM}{dw_{(0)}}} \quad (26.2)$$

Коэффициент устойчивости χ представляет собой мощность девиатора напряжений, для которой $M_{\infty} - M = (M_{\infty} - M_0)/e$. При наличии спектра структур экспериментальные кривые будут отклоняться от экспоненты, описываемой уравнением (26.2), но определение величины χ в том виде, как приведено выше, сохраняется.

Если параметры являются переменными величинами, то реологические уравнения, не теряя своей тензорной линейности, становятся нелинейными по отношению к компонентам тензоров. Этот род нелинейности называется физической нелинейностью¹⁾, и соответствующие реологические уравнения являются *квазилинейными*. Диаграммы зависимости напряжений от деформаций и кривые течения уже не являются прямыми линиями; идеальное тело, описываемое реологическим уравнением, таким образом, обобщается, и мы можем говорить об обобщенном или нелинейном теле Гука, обобщенной или нелинейной ньютоновой жидкости и т. д. Для нелинейной ньютоновой жидкости обычно применяется термин *неньютонова жидкость*, а для ее переменной вязкости В. Оствальд ввел термин *структурная вязкость*.

Однако могут быть случаи, когда физическая нелинейность, несмотря на свое название, не является следствием физических причин. Ранее считалось, что кинематические величины, входящие в уравнения зависимостей напряжений от деформации и напряжений от скоростей деформации, определяются соотношениями (3.8) и (3.10). В некоторых случаях метод, изложенный в части В, I, вызывает возражения. Одно из них уже упоминалось в конце § 10. Для его иллюстрации вспомним опыты Бернулли²⁾, который, не зная, по-видимому, работы Гука, пытался установить закон упругости. Если

¹⁾ Olszak W., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV 2, 107—111 (1954).

²⁾ Bernoulli D., Mém. Acad. Sci. 1705, 176—185.

Гук экспериментировал со струнами из стальной проволоки, то Бернулли исследовал лесу из кишки и получил параболическую диаграмму зависимости напряжений от деформаций. Эта нелинейность появляется вследствие пористой структуры исследуемого тела, причем в случае отсутствия пор материал может быть линейным.

Во втором случае нелинейность зависимости напряжений от деформаций может исчезнуть, если выражение, определяющее деформацию, является нелинейным (геометрическая нелинейность); реологические коэффициенты (модули и т. д.) могут быть при этом постоянными. Наконец, нелинейность зависимости напряжений от деформаций (и др.) может свидетельствовать о наличии спектра тел, составляющих, как было описано в § 23, модель материала со спектром постоянных коэффициентов.

β) *Изменение объемного модуля.* Объемный модуль занимает особое положение. Модуль сдвига μ , определяемый уравнением (10.1), в принципе может быть константой. Если будем считать константой также объемный модуль, определяемый формулой (9.1), то мы неизбежно столкнемся с противоречием. Записывая формулу (9.1) в виде

$$V = V_0 + \Delta(V_0) = V_0 \left(1 + \frac{\Delta(V_0)}{V_0} \right) = V_0 (1 + \varepsilon_v) = V_0 \left(1 - \frac{p}{\kappa} \right), \quad (26.3)$$

мы видим, что объем тела становится равным нулю¹⁾ при конечном гидростатическом давлении $p = \kappa$. Таким образом, κ должно возрасти при росте p . Чтобы избежать этого результата, была предпринята попытка исправить формулу (9.1), не отвергая ее в целом. Мы должны иметь в виду, что, строго говоря, напряжение представляет собой не тензор, а *тензорную плотность*. В общем

¹⁾ Это положение было использовано Бернулли (см. предыдущую ссылку) как аргумент против признания модуля Юнга константой. Он пошел еще дальше. Доказав, что призма не может быть сжата на 100% от ее первоначальной длины, т. е. до нулевой высоты, он заявил, что поскольку растяжение представляет собой отрицательное сжатие, то тело не может быть вытянуто на 100%. Из этого сочинения мы видим, что в 1705 г. еще не знали резины и что уже в то время физики преувеличивали роль математической аргументации.

в реологии нет необходимости рассматривать напряжение в этом аспекте, поскольку при реологических явлениях плотность материала не меняется сколько-нибудь значительно и может рассматриваться как параметр. Отметим здесь метод Хенки¹⁾, с помощью которого он получил уравнение упругого сжатия с постоянным реологическим коэффициентом. Полагая, во-первых,

$$dp = -\kappa \frac{dV}{V} \quad (26.4)$$

и определяя

$$e_v = \ln \left(\frac{V}{V_0} \right), \quad (26.5)$$

он получил зависимость

$$-p = \kappa e_v \quad (26.6)$$

и

$$V = V_0 e^{-\frac{p}{\kappa}}. \quad (26.7)$$

Согласно этому выражению объем сохраняет конечное значение при любом конечном давлении. Затем, принимая во внимание, что величина p является тензорной плотностью, он ввел так называемое *приведенное давление* p_{red} ²⁾:

$$p_{\text{red}} = \frac{Q_0}{Q} p = \frac{V}{V_0} p, \quad (26.8)$$

и, подставляя (26.6), получил:

$$-p = \kappa e_v \exp(-e_v). \quad (26.9)$$

Наконец, он ввел в рассмотрение *предельный относительный объем* ψ , который не может быть достигнут при любом конечном давлении. Таким образом он получил формулу с двумя коэффициентами: κ и ψ . Используя опытные данные Бриджмена³⁾, он заявил, что его окончательная

¹⁾ Hencky H., J. Rheology 2, 169—176 (1931).

²⁾ От англ. reduced—приведенный. (Прим. ред.)

³⁾ Bridgman P. W., Handbuch der Experimentalphysik, Bd. VIII/2, стр. 247—395.

формула пригодна для высоких давлений, тогда как при давлениях, близких к атмосферному, может применяться соотношение (26.6). Для обычных реологических явлений оно представляет собой достаточно хорошее приближение.

Этот пример показывает, как посредством введения геометрической нелинейности в формулу (26.3) мы избавились от физической нелинейности (переменной κ).

γ) *Изменение модуля Юнга*. Обширная литература по физической нелинейности в упругости имеет дело главным образом с модулем Юнга. Для цилиндрического образца с начальной длиной l и площадью поперечного сечения A_0 при испытаниях на растяжение модуль Юнга определяется отношением нормального напряжения $\sigma = P/A_0$ к удлинению по Коши $e_l = \Delta l/l_0$:

$$E = \frac{\sigma}{e_l}. \quad (26.10)$$

Если диаграмма растяжения не является прямой линией, то модуль E считается переменным.

Из второй формулы (10.6) видно, что изменение κ может повлечь за собой изменение E даже при постоянном μ . Однако мы можем пренебрегать этой зависимостью. Хотя в ходе испытания на растяжение изотропная компонента напряжений возрастает пропорционально растягивающей силе P , этот рост не так велик, чтобы изменение κ оказало заметное влияние на величину E . Поэтому считается, что изменение E вызывается только изменением μ . Последняя константа обычно не определяется непосредственно, так как испытание на растяжение связано с однородной деформацией, в то время как типичное испытание при определениях μ — кручение цилиндрического стержня — связано с неоднородной деформацией.

Здесь следует отметить, что несмотря на большое количество экспериментальных работ, в которых делались попытки отыскания закона изменения модуля E , теоретическое значение их ничтожно. При этом в лучшем случае устанавливались эмпирические формулы, применимые обычно в пределах некоторого ограниченного интервала, а чаще вообще нигде не применимые. Читатель, интересующийся историей вопроса, найдет некоторые

сведения у Кармана (K á r m á n (1913)) и Тимошенко¹⁾. В качестве примера приведем степенной закон Баха — Шюле:

$$e = \alpha \sigma^m, \quad (26.11)$$

широко применявшийся в сопротивлении материалов прошлым поколением, который можно иногда встретить в технической литературе и в настоящее время. Сравнение с (26.8) приводит к формуле

$$E = \frac{\sigma^{1-m}}{\alpha}. \quad (26.12)$$

Бах в обширной экспериментальной работе пытался определить значения m и α для различных материалов. Им было найдено, что $m > 1$ для сварочного железа, чугуна, меди, гранита, бетона и $m < 1$ для кожи. Им, в частности, были приведены излишне «точные» значения $m = 1,13713$ для одного бетона и $m = 1,20677$ для другого, причем не было отмечено того очевидного факта, что эти бетоны на основе установленных им соотношений не могут сравниваться, так как величина E имеет в этих случаях разные размерности²⁾. Критические замечания по поводу степенного закона были высказаны Рейнером³⁾. Трудности, связанные с размерностью, преодолеваются с помощью записи

$$\sigma = a e^n \quad (26.13)$$

и

$$E = a e^{n-1}, \quad (26.14)$$

так как e — безразмерная величина. Остается справедливым возражение, что для очень малых деформаций E или равно нулю, или равно бесконечности, в зависимости от того, n больше или меньше единицы. Это положение легко исправить, если при $n > 1$

1) Timoshenko S. P., History of strength of materials, New York, McGraw Hill Publ. Co., 1953. [Русский перевод: Тимошенко С. П., История науки о сопротивлении материалов, Гостехиздат, М., 1957. (Прим. ред.)]

2) Если приписать величине α размерность $(\kappa\Gamma/\text{см}^2)^{-m}$, как это следует из формулы (26.11), то модуль E будет иметь всегда одну и ту же размерность $\kappa\Gamma/\text{см}^2$. (Прим. ред.)

3) Reiner M., Naturwiss. 21, 294—299 (1933).

добавить постоянное слагаемое к правой части уравнения (26.14) или при $n < 1$ добавить постоянный член к обратной величине. Очевидно, что таким способом мы получим не физический закон, а лишь некоторую приближенную формулу. Следует отметить, что, по всей вероятности, величина E , определяемая таким способом, не является упругим модулем. Ван-дер-Поль¹⁾ предложил называть ее *модулем жесткости* (обозначается S), так как e , определяемая таким способом, не является упругой деформацией, а состоит из обратимой и необратимой составляющих. В связи с этим большинство исследователей применяет степенную зависимость для описания кривой *нагружения*, хотя, как уже отмечалось в § 1, упругая деформация может быть определена только при разгрузке.

Два свойства обуславливают изменение величины S даже при постоянном E . Это (i) мгновенная пластическая деформация и (или) (ii) вязко-упругость.

(i) Мгновенная пластическая деформация развивается при любом напряжении. Для объяснения этого свойства следует различать макро- и микронапряжения. Макронапряжение представляет собой некоторое «среднее напряжение», вычисляемое в соответствии с теорией упругости или, более просто, по формулам сопротивления материалов. Однако любое материальное тело имеет надрезы на своей поверхности, а также полости и трещины внутри. Последние вызывают местную *концентрацию* напряжений, причем эти микронапряжения могут значительно превышать средние напряжения, фиксируемые на диаграмме растяжения. Концентрация напряжений вызывает местные разрывы в хрупких материалах, таких, как бетон, камень или древесина, или пластические деформации в пластических материалах, например металле и влажном грунте; асфальт среди перечисленных материалов занимает промежуточное положение. Вследствие этого необратимая, т. е. *остаточная*, макродеформация будет наблюдаться даже при очень низких напряжениях, причем предел текучести практически отсутствует. Мгновенная пла-

¹⁾ Van der Poel C., Proc. 2nd Internat. Congr. Rheology, 1953.

стическая деформация наиболее значительна при *первом нагружении*. Величина ее бывает обычно меньше при каждом последующем цикле и *не превышает пластической деформации при первом нагружении*. Таким образом, упругость материала после серии циклов нагрузка — разгрузка улучшается, и появляется предел текучести. Это явление отчетливо проявляется во влажных глинах, где, однако, действует другой микромеханизм¹⁾, и в бетонах, но заметно также и в металлах, особенно в чугунах.

Таким образом, обычное определение пластического состояния, связанное с понятием предела текучести, неприменимо к такому материалу в «первичном» состоянии. Если, однако, мгновенная пластическая деформация происходила хотя бы один раз, то появляется предел текучести.

Диаграмма деформирования материала, обнаруживающего заметную пластическую деформацию, имеет при нагрузке форму параболы. Диаграмма же разгрузки, наоборот, прямая линия, пересекающая ось абсцисс на некотором расстоянии от начала координат. Отрезок, отсекаемый на оси абсцисс, равен (с учетом масштаба) пластической деформации. Разность между полной и пластической деформациями представляет собой упругую деформацию, и константа E может быть вычислена из диаграммы разгрузки.

(ii) Если материал имеет четко выраженные вязкоупругие свойства, как, например, у бетона, обычный метод испытаний при постепенно нарастающей нагрузке, а затем разгрузке с одновременной записью показаний дает петлю гистерезиса, обе ветви которой направлены выпуклостью вверх. Бингам и Рейнер²⁾ испытывали этим способом цементно-известковую бетонную балку, нагружая ее сосредоточенной силой в течение весьма краткого промежутка времени. При этом регистрировалась величина прогиба (являющегося мерой деформации). Это повторялось несколько раз при возрастающих нагрузках, вплоть до максимальных. Зависимость прогиба от силы (или

1) См. § 1.4 главы, написанной Мейси (Masey H. H.), в книге под редакцией Reiner (1954).

2) Ringham E. C., Reiner M., Physics 4, 88 (1953).

напряжения от деформации) представлена на рис. 29. Диаграмма разгрузки была почти прямой линией, причем ее наклон равнялся наклону начального участка кривой нагружения. На основе этого опыта был сделан вывод о том, что мгновенная деформация цементно-известкового бетона (изображаемая пружиной H_M модели Бюргерса, см. § 20) следует закону Гука с константой E ; кривизна диаграммы нагрузки обусловлена упругим последствием. Вопреки общераспространенному мнению, такие представления, по-видимому, применимы к крупнозернистому бетону. Например, Блейки и Бересфорд¹⁾ заявили, что «пока нет убедительных данных о значительном отклонении диаграммы растяжения бетона от прямой линии вплоть до разрушающего напряжения».

27. Высокая эластичность резин. В § 1 отмечалось, что в настоящем обзоре реология излагается с феноменологической точки зрения, причем немеханические (например, тепловые) явления не учитываются и температура рассматривается как параметр. Поэтому мы не делали различия между двумя существенными разновидностями упругости, одна из которых обусловлена потенциальной энергией материала и вторая — кинетической энергией его частиц. Первый вид упругости характерен для металлов и второй вид — для газов. Первый рассматривается классической теорией упругости²⁾, второй является объектом изучения кинетической (или динамической) теории газов³⁾. Удивительно, как много прошло времени, прежде чем стало ясным существенное различие двух видов упругости. Во втором издании Британской энциклопедии (*Encyclopaedia Britannica*, 1779) в статье «Упругость» приводится следующее высказывание: «Причиной упругости воздуха являются силы отталкивания между его частицами»; далее силы отталкивания описываются таким образом, как буд-

1) Blakey F. A., Beresford F. D., Report C-2, 2—4. Commonwealth Scient. Ind. Res. Org. Melbourne, 1953.

2) См. Sneddon I. N., Berry D. S., статья в «Handbuch der Physik», Elastizität und Plastizität, Berlin—Göttingen—Heidelberg, J. Springer-Verlag, Bd. 6 (1958), S. 1—126. [Русский перевод Снеддон И., Берри Д., Классическая теория упругости, Физматгиз, М., 1961. (Прим. ред.)]

3) См. Handbuch der Physik, Thermodynamik der Gase, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, Bd. XII, 1958.

то речь идет о сжатой пружине. Аналогично третий вид, а именно высокую эластичность резин, только недавно

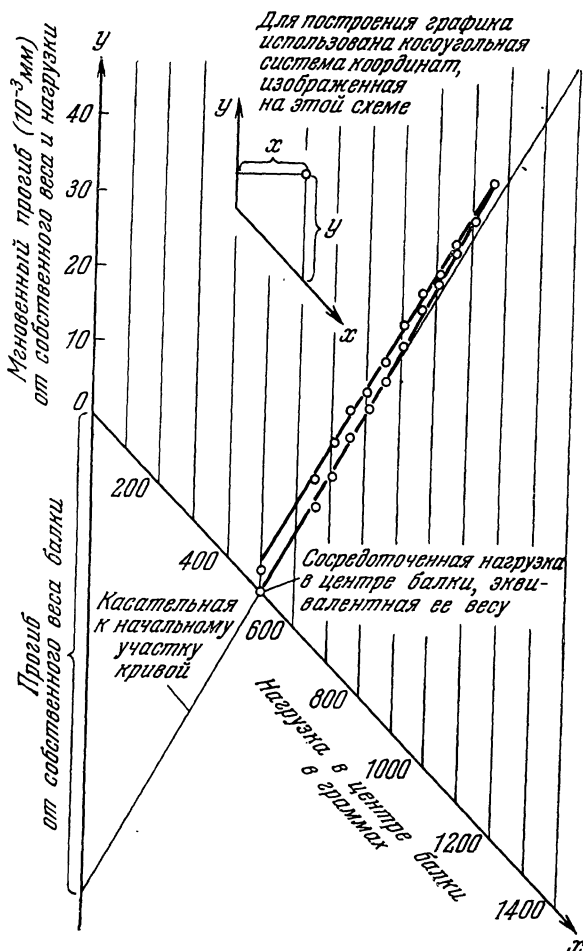


Рис. 29. Диаграмма зависимости напряжений от деформаций для длинной цементно-известковой (1 : 3) балки.

стали отличать от потенциальной упругости. Долгое время отождествляли эти виды упругости, причем частицы

резины изображали в виде маленьких пружин. Резиноподобная упругость описана Ставерманом в XIII томе «Handbuch der Physik». Для полноты изложения мы коснемся феноменологической стороны этого вида упругости. Упругие деформации у резин достигают 500—1000%, модуль Юнга не превышает 10^7 бар.

С феноменологической точки зрения не существует различия между потенциальной, кинетической и резиноподобной упругостью. Правда, материалы, обладающие упругостью первого рода, обнаруживают в компактном состоянии весьма малые упругие деформации, определяемые законом Гука. Как отмечено в § 26 и еще ранее в § 10, если этот же материал имеет несплошную структуру, он может обнаруживать значительные (мнимо конечные) деформации, которые не отличаются с феноменологической точки зрения от конечных деформаций. Это можно истолковать как слабость феноменологической точки зрения. Вспомним, однако, что для любого закона физики существуют определенные области, за пределами которых этот закон неверен и применяться не может; это не значит, что данный закон неверен также и в своей области.

Различие между потенциальной и резиноподобной упругостью было выявлено примерно 25 лет тому назад, после того как была установлена их совершенно различная температурная зависимость, аналогичная температурной зависимости потенциального и кинетического типа. Грубо говоря, в потенциальной упругости материал становится «мягче» с ростом температуры, тогда как в случаях кинетической и резиноподобной упругости материал становится «жестче». Таким образом, резиноподобная упругость аналогична упругости газа.

Известно много материалов, существующих в природе, а также получаемых искусственным путем, которые состоят из длинноцепочечных «макромолекул», т. е. являются высокополимерами. Гибкие молекулы могут быть линейными или разветвленными и имеют различную длину, т. е. обладают статистическим распределением цепей по длинам.

Молекулы могут соединяться *поперечными связями*, образующими *сетку*, как, например, у вулканизированной резины. Цепи имеют неправильную, ломаную форму; участвуя в броуновском движении, они беспорядочно

закручиваются. Такие материалы обычно являются аморфными и становятся кристаллическими лишь при низких температурах или больших деформациях. Обычная теория резиноподобной упругости рассматривает аморфное состояние, для которого можно сделать некоторые общие выводы независимо от химического строения материала.

При выводе закона упругости для высокополимеров применяются два метода. При статистическом рассмотрении кинетической теорией вычисляется вероятность того, что расстояние между концами цепи имеет определенное значение. Это приводит к некоторым соотношениям, связывающим напряжение и деформации. Новейшие теории резиноподобной упругости основываются на методах реологии. В отличие от статистической теории, при этом не делается каких-либо предположений о молекулярном строении материала. Вместо этого постулируется подходящее реологическое уравнение, на основании которого предсказывается поведение материала при определенных условиях. Описанный метод был развит Муни¹⁾. Предполагалось, что материал подвергался однородной деформации, главные степени удлинения²⁾ которой $\lambda(i)$ были установлены. Последние определяют тензор, третий инвариант которого

$$III = \lambda(i) \cdot \lambda(j) \cdot \lambda(k) \quad (27.1)$$

представляет собой относительный объем тела в деформированном состоянии. Далее предполагается, что материал несжимаем, т. е.

$$III = 1. \quad (27.2)$$

В кинетической теории показано, что свободная энергия Φ (ср. с § 5) определяется выражением

$$\Phi = \frac{\mu}{2} [\lambda^2(i) + \lambda^2(j) + \lambda^2(k) - 3], \quad (27.3)$$

где μ пропорциональна абсолютной температуре T . Если известен вид функции свободной энергии Φ , то могут быть

¹⁾ Моонеу М., J. Appl. Phys. 11, 582 (1940).

²⁾ Степень удлинения — отношение длины деформированного элемента l к длине его в недеформированном состоянии l_0 , т. е. $\lambda = l/l_0$ (см. стр. 124). (Прим. ред.)

установлены зависимости напряжений от деформаций для любого вида деформированного состояния.

При втором методе исходят непосредственно из реологической зависимости напряжений от деформаций. Муни, таким образом, постулировал уравнение для одноосного растяжения, имеющее вид

$$\sigma = 2 \left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (27.4)$$

Уравнение Муни учитывает некоторые отклонения от статистической теории. Из зависимости (27.4) следует, что

$$\Phi = C_1 [\lambda^2(i) + \lambda^2(j) + \lambda^2(k) - 3] + \\ + C_2 \left[\frac{1}{\lambda^2(i)} + \frac{1}{\lambda^2(j)} + \frac{1}{\lambda^2(k)} - 3 \right]. \quad (27.5)$$

Нетрудно видеть, что формула (27.3) является частным случаем более сложной теории Муни, когда $C_2 = 0$. Ривлин¹⁾ подтвердил, что соображения симметрии требуют, чтобы λ входили в это выражение как λ^2 .

Из экспериментов было найдено, что для некоторых набухших резин порядок величины констант Муни составляет $C_1 \approx 10^6$ бар и $C_2 \approx 10^5$ бар. Для сухих резин величина отношения C_1/C_2 не установлена.

28. Структурная вязкость. В Соединенных Штатах после исследования Бингамом легкодеформируемых пластических тел с переменной эффективной вязкостью было установлено снижение вязкости с ростом напряжения сдвига у некоторых истинных жидкостей. Поэтому такого рода жидкости были названы «псевдопластическими». Сам Бингам установил, что кривые консистентности зелей желатины в воде и растворов нитроцеллюлозы не следуют предложенному им уравнению, причем, по его выражению, «дело здесь не в количественных различиях, а в принципиально новом явлении». Аналогичные открытия в Европе были сделаны в обратной последовательности. После Грехема — основоположника коллоидной химии, назвавшего вискозиметр в середине прошлого века коллоидоскопом, — измерения вязкости стали одним из самых распространенных методов исследования коллоидных растворов. Они

¹⁾ Rivlin, Proc. Ind. Rubber Techn. Conf. London, 1948.

выполнялись обычно с помощью вискозиметра Оствальда, не позволяющего регулировать давление в желаемых пределах. Однако большой материал, накопленный таким образом, с трудом поддавался интерпретации, по-видимому, вследствие аномального поведения коллоидных суспензий, т. е. изменения коэффициента вязкости. Такие изменения стали наблюдаться в начале этого столетия. Позднее В. Оствальд и его ученики¹⁾ выполнили большое число исследований с помощью капиллярного прибора специальной конструкции. Оствальд объяснил аномальное поведение наличием «структуры» у жидкости и ее изменением в процессе течения и ввел термин «структурная вязкость». Этот термин получил в настоящее время всеобщее распространение. Для жидкостей, обнаруживающих переменную вязкость такого рода, Рейнером²⁾ был введен термин «неньютоновы жидкости», причем последний также получил всеобщее распространение. Можно возразить, что максвеллова жидкость также не является неньютоновой, хотя она и не обладает переменной вязкостью. По-видимому, термин «обобщенная» или «нелинейная» ньютонова жидкость был бы здесь более пригоден, но мы в дальнейшем будем называть жидкости, обладающие структурной вязкостью, неньютоновыми.

Различные структурные процессы, определяющие изменения коэффициента вязкости, рассматриваются в микрореологии и описаны здесь в главе С. Оствальдом было впервые установлено, что с феноменологической точки зрения макрореологии кривая консистенности имеет следующие основные свойства.

Кривая исходит из начала координат (это говорит о том, что материал является жидкостью), причем V монотонно возрастает с увеличением P , т. е. не существует максимума для V . В начале координат кривая имеет определенный наклон. При больших значениях V/P кривая приближается к прямолинейному лучу, исходящему из начала координат и имеющему более крутой наклон, чем наклон кривой в начале координат. Вследствие этого

¹⁾ Ostwald W., Kolloid-Z. 36, 99 (1925); Ostwald W. Averbach R., Kolloid-Z. 38, 261—280 (1926).

²⁾ Reiner M., J. Rheology 1, 5 (1929).

кривая сначала обращена выпуклостью к оси P , а после точки перегиба меняет свою кривизну (рис. 30). Первые исследователи нелинейных кривых консистентности наблюдали только незаштрихованную часть диаграммы, для описания которой ими применялся степенной закон, упо-

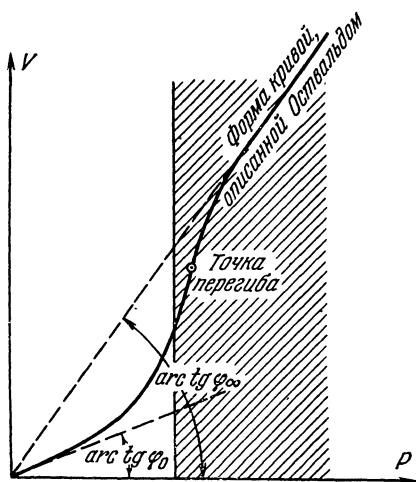


Рис. 30. Кривая консистентности неньютоновой жидкости. Здесь φ_0 — текучесть покоящейся жидкости, φ_∞ — максимальная текучесть жидкости. Незаштрихованная часть диаграммы изображает кривую в том виде, как это описано многими исследователями.

мянутый в § 26. Оствальд впервые наблюдал и описал заштрихованную часть, в связи с чем кривая такой формы была названа *кривой Оствальда*. Независимо от результатов исследований, показывающих, что вязкость, приближается к определенному значению η_∞ , мы можем сказать *априори*, что характерным свойством неньютоновой жидкости является понижение вязкости с ростом напряжения сдвига; однако вязкость не может уменьшаться до нуля. В самом деле, такая жидкость представляет собой дисперсную систему, вязкость которой не может быть ниже, чем вязкость дисперсионной среды.

Задача о структурной вязкости может быть сформулирована следующим образом: мы должны заменить линейное уравнение (11.1) более общим $s = F(f)$ и отыскать вид функции F . Для простоты рассмотрим плоское ламинарное течение, представленное на рис. 31. Если τ — компонента напряжений и $\dot{\gamma}$ — градиент скорости, то

$$\dot{\gamma} = \varphi \tau, \quad (28.1)$$

где φ — коэффициент текучести, являющийся функцией напряжений τ . Таким образом, задача сводится к отысканию функции $\varphi(\tau)$.

Если нам неизвестен вид функции $\varphi(\tau)$, то естественно представить ее в виде степенного ряда:

$$\varphi = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots = \sum_{n=0}^n a_n\tau^n. \quad (28.2)$$

Из этого уравнения при $\tau=0$ находим величину $\varphi = a_0$. Назовем ее *текучестью покоящейся жидкости* и обозначим φ_0 ; тогда

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_1^n a_n\tau^n. \quad (28.3)$$

Это выражение можно уточнить из следующих элементарных соображений. Если мы будем определять вязкость с помощью ротационного прибора, описанного в § 14, то она, очевидно, не должна зависеть от направления вращения внешнего цилиндра. Знак τ , однако, меняется с изменением направления вращения. Для того чтобы изменение направления вращения не сказывалось на величине φ , выражение (28.3) должно содержать только четные степени τ , т. е.

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{n=1}^n a_{2n}\tau^{2n}, \quad (28.4)$$

и, таким образом,

$$\dot{\gamma} = \varphi_0\tau + \sum_{n=1}^n a_{2n}\tau^{2n+1}. \quad (28.5)$$

Это уравнение легко интегрируется для двух стандартных типов вискозиметров, описанных в § 14, следующим образом:

Капиллярный вискозиметр	Вискозиметр с коаксиаль- ными цилиндрами
----------------------------	---

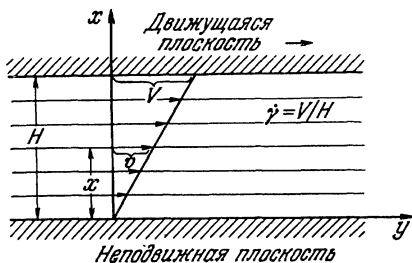


Рис. 31. Плоское ламинарное течение.

Сначала запишем формулы для определения градиента скорости $\dot{\gamma}$ и касательного напряжения τ .

(См. (14.4) и (14.10).) (См. (14.14) и (14.22).)

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dr}, \quad \tau = r \frac{\Delta p}{2l} \cdot \left| \dot{\gamma} = r \frac{d\theta}{dr}, \quad \tau = \frac{M}{2\pi r^2 h} \right. \quad (28.6)$$

Подставляя их в реологическое уравнение (28.5), получим (считая, что $\varphi_0 = 0$):

$$\frac{dv}{dr} = \sum_{n=0} \alpha_{2n} \left(r \frac{\Delta p}{2l} \right)^{2n+1} \cdot \left| r \frac{d\theta}{dr} = \sum_{n=0} \alpha_{2n} \left(\frac{M}{2\pi r^2 h} \right)^{2n+2} \right. \quad (28.7)$$

Интегрируя по r , имеем:

$$v = \frac{2l}{\Delta p} \sum_{n=0} \frac{\alpha_{2n}}{2n+2} \left(\frac{r \Delta p}{2l} \right)^{2n+2} + C, \quad \left| \dot{\theta} = - \sum_{n=0} \frac{\alpha_{2n}}{4n+2} \left(\frac{M}{2\pi h r^2} \right)^{2n+1} + C \right. \quad (28.8)$$

Постоянные интегрирования могут быть определены из граничного условия, заключающегося в том, что скорость жидкости у твердой стенки равна скорости стенки.

Отсюда находим:

$$-v = \frac{2l}{\Delta p} \sum_{n=0} \frac{\alpha_{2n}}{2n+2} \times \left| \dot{\theta} = \sum_{n=0} \frac{\alpha_{2n}}{4n+2} \left[\left(\frac{M}{2\pi h R_i^2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{M}{2\pi h r^2} \right)^{2n+1} \right] \right. \quad (28.9)$$

Расход в единицу времени

Угловая скорость наружного цилиндра

$$\frac{Q}{t} = \int_{r=0}^{r=R} v \cdot 2\pi r dr = \left| \dot{\Omega} = \sum_{n=0} \frac{\alpha_{2n}}{4n+2} \left(\frac{M}{2\pi h} \right)^{2n+1} \times \left(\frac{1}{R_i^{4n+2}} - \frac{1}{R_e^{4n+2}} \right) \right. \quad (28.10)$$

Для $n=0$ это уравнение сводится ($1/\alpha_0 = \eta$) к закону Пуазейля (4.12). | к закону Маргулиса (14.24).

Вводя в уравнение (28.10) консистентные переменные, определяемые формулами (14.25) и (14.26), найдем выра-

жения, независимые от геометрических размеров приборов:

$$V = \sum_{n=0} \frac{4a_{2n}}{2n+4} P^{2n+1}, \quad \left| \quad V = \frac{2}{1-a} \sum_{n=0} \frac{a_{2n}}{4n+2} (1-a^{2n+1}) P^{2n+1} \right.$$

$$a = (R_i/R_e)^2 \quad (28.11)$$

Эти уравнения в виде степенных рядов, очевидно, относятся только к незаштрихованной части рис. 30. Пока еще не найдено уравнение, описывающее кривую в целом. Рейнер (Reiner (1949, b), стр. 113—119) применил уравнение (26.2), которое для настоящего случая имеет вид

$$\chi = \frac{\varphi_{\infty} - \varphi}{\frac{d\varphi}{d(\tau^2)}}. \quad (28.12)$$

Интегрирование его при постоянном χ приводит к формуле

$$\dot{\gamma} = [\varphi_{\infty} - (\varphi_{\infty} - \varphi_0) \exp\left(-\frac{\tau^2}{\chi}\right)] \tau. \quad (28.13)$$

Рейнер и Шенфельд-Рейнер¹⁾ применяли уравнение (28.13) для описания течения растворов каучука в толуоле в трубках и ротационных приборах разных размеров. При этом было показано, что экспериментальную кривую нельзя описать простой экспоненциальной функцией, хотя качественное соответствие формулы (28.13) с опытом ими наблюдалось. Причину следует искать в наличии распределения частиц каучука по размерам.

Исследования Рейнера и Шенфельд-Рейнера показали, что кривая Оствальда в виде, представленном на рис. 30, применима и для очень малых напряжений сдвига. Кривая начинается прямолинейным участком, за которым следует криволинейный, обращенный в сторону оси P сначала выпуклостью, а затем вогнутостью. Конечный участок также имеет форму прямой, проходящей через начало координат. Таким образом, кривая имеет четыре характерные точки, а именно: (i) начало, (ii) точку, где кончается прямолинейный участок (a), (iii) точку перегиба (b),

¹⁾ Reiner M., Schoenfeld-Reiner R., Kolloid-Z 65. 44 (1933).

(iv) точку, где вновь начинается прямолинейный участок (с). Итак, существуют две области, где жидкость является *простой* ньютоновой, т. е. (I) от начала координат до точки *a* и (II) от точки *c* до области турбулентности. Точки *a*, *b* и *c* определяют следующие коэффициенты вязкости: вязкость покоящейся жидкости η_0 , минимальную вязкость η_∞ и эффективную вязкость в точке перегиба η_b . Первые две, применяемые к областям, где жидкости являются ньютоновыми, представляют собой *истинные* вязкостные характеристики материала. Между точками 0 и *a*, с одной стороны, а также от *c* и выше до области турбулентности, с другой, *вязкость одна и та же* в любом слое текущей жидкости, в связи с чем эту вязкость можно считать истинной. Напротив, между точками *a* и *c* вязкость меняется от слоя к слою; вязкости, вычисляемые обычным способом, являются *эффективными*.

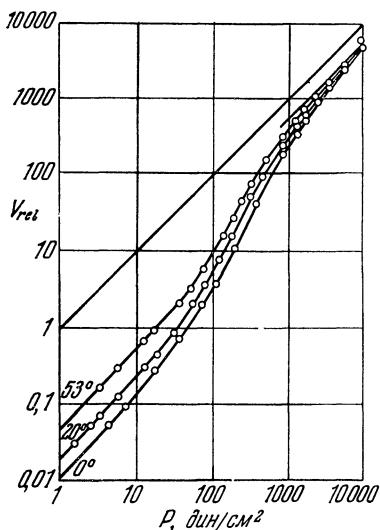


Рис. 32. Кривые консистенции 0,25%-ного раствора нитроцеллюлозы в логарифмических координатах (по Филиппову).

Эти особенности типичны для неньютоновых жидкостей. Кривые текучести удобно строить в логарифмических координатах; при этом мы получим так называемые *логарифмические гомологии* кривых консистенции. Логарифмической гомологией прямой линии является прямая же, наклоненная под углом 45° ; поэтому кривая $\ln V - \ln P$ начинается и заканчивается такими прямолинейными отрезками. Более подробно этот вопрос изложен у Филиппова (Philippoff (1942)), к книге которого мы и отсылаем читателя. На рис. 32 представлены логарифмические гомологии кривых консистенции для 0,25%-ных растворов нитроцеллюлозы, заимствованные у Филиппова.

Уравнения, полученные в этом разделе для неньютоновой жидкости, могут быть легко обобщены для нелинейного тела Бингама путем подстановки $\tau - \dot{\epsilon}$ вместо τ .

29. Геометрическая нелинейность. а) *Меры конечной деформации.* В § 26 отмечалось, что нелинейные зависимости напряжений от деформаций могут быть обусловлены не переменными реологическими коэффициентами, например упругим модулем, но различными способами определения деформаций. Тензор деформации, определенный в разделе 3, является линейным относительно компонент градиента перемещений. Такое определение является правильным лишь при бесконечно малых градиентах перемещений и бесконечно малых деформациях ϵ . В § 6 мы отмечали, что в настоящей книге будут рассматриваться только бесконечно малые деформации; однако для понимания материала, который будет изложен в § 29, б), мы должны коротко коснуться мер конечных деформаций.

Если деформация является конечной, мы можем записать уравнение (10.2), заменяя ϵ на e , в виде

$$s_{lm} = \lambda_L e_{\alpha\alpha} \delta_{lm} + 2\mu e_{lm}. \quad (29.1)$$

Уравнение (29.1) внешне не отличается от уравнения (10.2), оно все еще остается линейным относительно компонент тензоров, но, как вскоре будет показано, такое утверждение вводит нас в заблуждение. На самом деле сразу же обнаруживаются эффекты второго порядка по отношению к компонентам упругой деформации и, следовательно, напряжений.

Величина этих эффектов зависит от принятого определения деформации e_{lm} .

Не существует единой меры деформации. Призматический элемент длиной l_0 , ориентированный по направлению главных осей, после деформации имеет длину

$$l = l_0 + \Delta l. \quad (29.2)$$

Если деформация бесконечно мала, то в соответствии с мерой деформации Коши (формула (3.8)) имеем:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 = \lambda - 1, \quad (29.2')$$

где λ — *главная степень растяжения*, равная

$$\lambda = \frac{l}{l_0}. \quad (29.3)$$

Мы можем обобщить это определение и на конечные деформации, принимая [как и в уравнении (29.2')] для e выражение

$$e^C = \lambda - 1. \quad (29.4)$$

Но в качестве меры упругой деформации (и вообще любой деформации) можно использовать любую функцию от λ при условии, что она (а) обращается в нуль при $\lambda=1$ и $l=l_0$ и нет изменения длины, (б) сводится к деформации, определяемой уравнением (29.2'), когда $\lambda-1$ бесконечно мало, и (с) является безразмерной величиной¹⁾. Все эти условия выполнены для определений деформации, предложенных Свейнгером²⁾, Гринном, Алманси и Хенки³⁾. Они выглядят следующим образом:

$$e^S = 1 - \frac{1}{\lambda} = (\lambda - 1) - (\lambda - 1)^2 + \dots, \quad (29.5)$$

$$e^G = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1) + \frac{1}{2} (\lambda - 1)^2, \quad (29.6)$$

$$e^A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) = (\lambda - 1) - \frac{3}{2} (\lambda - 1)^2 + \dots, \quad (29.7)$$

$$e^H = \ln \frac{l}{l_0} = \ln [1 + (\lambda - 1)] = (\lambda - 1) - \frac{(\lambda - 1)^2}{2} + \dots \quad (29.8)$$

1) Это необходимо для того, чтобы деформация не зависела от размеров тела. Например, стальной стержень с площадью поперечного сечения 1 см², растягиваемый усилием 1000 кг, удлинится примерно на 1/2 мм, если его длина равна 1 м, и на 1 мм, если его длина 2 м, и т. д. Для физического исследования, однако, необходимо, чтобы физическая величина, характеризующая этот процесс, т. е. деформация, не зависела от несущественной характеристики длины и, следовательно, чтобы она была одной и той же в обоих случаях.

2) Swainger K. H., Phil. Mag. (7) 36, 443 (1945).

3) Для справки см. Truesdell (1952). Соотношение (29.6), выведенное в книге Лява из теоретических предпосылок, представляет собой меру конечной упругой деформации без указания ее частного характера. Это определение было использовано Кирхгофом в связи с его исследованиями очень тонких стержней.

Формула (29.5) была предложена Кёрбером, а затем независимо от него Свейнгером для описания пластических деформаций металлов. Для того чтобы оценить разницу между этими определениями, допустим, что длина стержня увеличилась в два раза. Тогда различные определения приводят к различным значениям деформации:

$$e^C = 100\%, \quad e^G = 150\%, \quad e^H = 66\%, \quad e^A = 37,5\%, \quad e^S = 50\%.$$

Если длина стержня станет вдвое меньше, то

$$e^C = -50\%, \quad e^G = -37,5\%, \quad e^H = -66\%, \quad e^A = -150\%, \\ e^S = -100\%.$$

Тензорные уравнения для двух определений были получены Мурнаганом (1937). Это мера Грина

$$2_{lm}^G e = g_{\alpha\beta}(l, x^\alpha)(m, x^\beta) - l m g \quad (29.9a)$$

и мера Алманси

$$2_{lm}^A e = g_{lm} - \alpha\beta g(x, l)(\beta x, m), \quad (29.10a)$$

или, если введем градиент перемещений, как в § 25, имеем:

$$2_{lm}^G e = l m \Gamma + m l \Gamma + (\alpha l \Gamma)(\alpha m \Gamma), \quad (29.9b)$$

$$2_{lm}^A e = \Gamma_{lm} + \Gamma_{ml} - (\Gamma_{\alpha l})(\Gamma_{\alpha m}). \quad (29.10b)$$

Выражение для объемной деформации по Алманси имеет вид

$$e_v^A = 1 - (1 - 2I + 4II - 8III)^{1/2}. \quad (29.10c)$$

Эти две меры пригодны для описания упругих деформаций. Но они, как было отмечено в § 25, не могут описывать пластические деформации, а также деформации, обусловленные течением. Для последних может применяться мера Хенки.

Тензорное выражение деформации по Хенки может быть получено с помощью метода, описанного в § 7.

То, что описано там как «первый эксперимент», здесь определяется уравнениями (29.7) и (29.8), из которых имеем:

$$2e^H(i) = -\ln(1 - 2e^A(i)) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} (2e^A(i))^n. \quad (29.11)$$

Пусть $2e^H(i) = y(i)$ и $2e^A(i) = x(i)$, причем $x(j) = x(k) = 0$. Сравнивая с выражениями (7.40), мы видим, что K_0 всегда обращается в нуль. Значения K_n , начиная с $n=1$, определяются формулой

$$K_n = \frac{1}{n}. \quad (29.12)$$

Из (7.35) получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} F_0 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a+2b+3c=n} (-1)^b \frac{c(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I_x^a I I_x^b I I I_x^c = \\ &= \sum_{\substack{a, b, c=0 \\ (a+2b+3c \geq 3)}}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c) a!b!c!} I_x^a (-I I_x)^b I I I_x^c = \\ &= \sum_{a, b, c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c) a!b!c!} I_x^a (-I I_x)^b I I I_x^c, \end{aligned} \quad (29.13)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a+2b+3c=n-1} (-1)^b \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I_x^a I I_x^b I I I_x^c = \\ &= 1 + \sum_{\substack{a, b, c=0 \\ (a+2b+3c \geq 2)}}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+1) a!b!c!} I_x^a (-I I_x)^b I I I_x^c = \\ &= 1 + \sum_{a, b, c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+1) a!b!c!} I_x^a (-I I_x)^b I I I_x^c, \end{aligned} \quad (29.14)$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{1}{2} + \sum_n \frac{1}{n} \sum_{n=3a+2b+3c=n-2}^{\infty} (-1)^b \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{a!b!c!} \times \\
&\quad \times I_x^a II_x^b III_x^c = \frac{1}{2} + \\
&\quad + \sum_{\substack{a, b, c=0 \\ (a+2b+3c \geq 1)}}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+2)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{a, b, c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+2)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c. \quad (29.15)
\end{aligned}$$

После ряда преобразований находим F_0 , F_1 и F_2 :

$$F_0(I_x, II_x, III_x) = III_x \int_0^1 \frac{\sigma^2 d\sigma}{1 - I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}, \quad (29.16)$$

$$F_1(I_x, II_x, III_x) = \int_0^1 \frac{(1 - I_x \sigma) d\sigma}{1 - I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}, \quad (29.17)$$

$$F_2(I_x, II_x, III_x) = \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 - I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}, \quad (29.18)$$

и получим окончательное выражение:

$$\begin{aligned}
2e_m^H &= \left[III \int_0^1 \frac{\sigma^2 d\sigma}{1 - I\sigma + II\sigma^2 - III\sigma^3} \right] \delta_m^I + \\
&\quad + \left[\int_0^1 \frac{(1 - I\sigma) d\sigma}{1 - I\sigma + II\sigma^2 - III\sigma^3} \right] 2e_m^A + \\
&\quad + \left[\int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 - I\sigma + II\sigma^2 - III\sigma^3} \right] 4e_a^I e_m^a. \quad (29.19)
\end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим в декартовых координатах

простой сдвиг; пусть

$$x_0 = x, \quad y_0 = y - Sz, \quad z_0 = z. \quad (29.20)$$

Отсюда

$$\Gamma_{lm} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = {}_{lm}\Gamma \quad (29.21)$$

и конечная деформация¹⁾

$$2e_{lm}^A = S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -S \end{vmatrix} \quad 2e_{lm}^G = S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & S \end{vmatrix}, \quad (29.22a, b)$$

а ее инварианты будут (см. формулы (7.12))

$$\left. \begin{aligned} I_A &= -S^2/2, & II_A &= -S^2/4, & III_A &= 0, \\ I_G &= S^2/2 & II_G &= -S^2/4, & III_G &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.23)$$

Кроме того, имеем:

$$4e_{lm}^A e_{\alpha m}^A = S^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -S \\ 0 & -S & 1 + S^2 \end{vmatrix}, \quad (29.24)$$

так что

$$2e_{lm}^H = S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & SF_2 & F_1 - S^2 F_2 \\ 0 & F_1 - S^2 F_2 & S(F_1 - F_2) + S^3 F_2 \end{vmatrix}. \quad (29.25)$$

Здесь

$$F_0 = 0, \quad (29.26)$$

$$F_1 = \int_0^1 \frac{(1 + S^2 \sigma) d\sigma}{1 + S^2 \sigma - S^2 \sigma^2} = \frac{S^2 + 2}{S^2 C} \ln \left| \frac{C+1}{C-1} \right|, \quad (29.27)$$

$$F_2 = \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 + S^2 \sigma - S^2 \sigma^2} = \frac{1}{S^2 C} \ln \left| \frac{C+1}{C-1} \right|, \quad (29.28)$$

¹⁾ В соответствии с уравнением (3.8) будем иметь $d_{yz} = d_{zy} = S/2$, причем все другие компоненты равны нулю.

где

$$C = \sqrt{1 + \frac{4}{S^2}}. \quad (29.29)$$

Окончательно имеем:

$$e_{lm}^H = \frac{1}{CS} \ln \left| \frac{C+1}{C-1} \right| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S/2 & 1 \\ 0 & 1 & -S/2 \end{vmatrix}, \quad (29.30)$$

причем

$$I_H = 0, \quad II_H = -\frac{1}{4} \ln \frac{C+1}{C-1}, \quad III_H = 0. \quad (29.31)$$

β) *Поперечная упругость при бесконечно малой деформации.* После того, как мы нашли выражения для конечных деформаций, из формулы (29.1) мы можем вычислить соответствующие напряжения. Они являются нелинейными относительно компоненты градиента перемещений $\Gamma_{vz} = S$, хотя соотношение (29.1) не потеряло своей *тензорной линейности*. Уравнения такого типа называются квазилинейными (см. T r u e s d e l l (1952)).

Напряжения должны быть отнесены к конечному состоянию, которое является состоянием равновесия. Меры Алманси и Хенки относятся к этому состоянию; если же используется мера Грина, которая связана с начальным состоянием, то мы должны учитывать вращение элемента.

Матрица вращения имеет вид

$$R_{lm} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad (29.32)$$

где (см. L o v e (1927), Chap. 3)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{2}. \quad (29.33)$$

Таким образом,

$$e_{lm}^G = S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (29.34)$$

Мы не можем осветить здесь аналогичные построения для конечных деформаций. Как было отмечено в § 6, в этой главе мы имеем дело только с бесконечно малыми деформациями ¹). Таким образом, соответствующие выражения

для $\overset{G}{e}_{lm}$, $\overset{A}{e}_{lm}$, $\overset{H}{e}_{lm}$ сводятся к формулам для $\overset{G}{\varepsilon}_{lm}$, $\overset{A}{\varepsilon}_{lm}$, $\overset{H}{\varepsilon}_{lm}$. При этом мы пренебрегаем S или S^2 по сравнению с единицей, но сохраняем член S^2 , если он является первым членом ряда. Выражения для $\overset{G}{\varepsilon}_{lm}$ и $\overset{A}{\varepsilon}_{lm}$ не изменяются, но формула для $\overset{H}{\varepsilon}_{lm}$ принимает вид

$$\overset{H}{2\varepsilon}_{lm} = S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{S}{2} \end{vmatrix}. \quad (29.35)$$

Мы видим, что если градиент перемещений является бесконечно малым, то члены первого порядка совпадают во всех мерах, тогда как члены второго порядка значительно отличаются.

Подставляя бесконечно малые упругие деформации, определяемые выражениям и (29.22а), (29.34) и (29.35), в (29.1), находим:

$$\overset{G}{s}_{lm} = \frac{\lambda s^2}{2} \delta_{lm} + \mu S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (29.36)$$

$$\overset{A}{s}_{lm} = -\frac{\lambda s^2}{2} \delta_{lm} + \mu S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -S \end{vmatrix}, \quad (29.37)$$

$$\overset{H}{s}_{lm} = \mu S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{S}{2} \end{vmatrix}. \quad (29.38)$$

¹) Теория конечных деформаций изложена Ноллем (Noll W.) в X томе «Handbuch der Physik», Struktur der Flüssigkeiten, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.

В противоположность линейной классической теории упругости, простой сдвиг сопровождается не только касательными напряжениями. В дополнение к последним в первом случае возникает всестороннее растяжение и во втором случае — всестороннее сжатие. Возникают также нормальные напряжения в направлении перемещения и в перпендикулярном направлении. Последние образуют систему *поперечных напряжений* ¹⁾. Эти поперечные напряжения имеют следующие компоненты:

в направлении перемещения $\begin{matrix} G & A & H \\ + & 0 & + \end{matrix}$
 в направлении, нормальном к перемещению, $\begin{matrix} 0 & - & - \end{matrix}$
 где «+» означает растягивающее и «—» — сжимающее напряжение. Если эти напряжения второго порядка отсутствуют, то напряжение при простом сдвиге

$$s_{lm} = \tau \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (29.39)$$

может вызвать, в дополнение к деформации сдвига

$$2\varepsilon_{lm} = \frac{\tau}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (29.40)$$

следующие деформации:

	G	A	H
Объемная деформация	сжатие	расширение	нуль
В направлении перемещения	сжатие	нуль	сжатие
В направлении, нормальном к перемещению	нуль	растяжение	растяжение

Изменение объема, вызванное простым сдвигом, было названо *дилатансией*. Дилатансия впервые наблюдалась у

¹⁾ То есть действующих в направлении, перпендикулярном перемещению. (Прим. ред.)

песка Рейнольдсом ¹⁾, который и ввел этот термин. Дилатансия может быть упругой, пластической и вязкой. Пластическая дилатансия известна в грунтах: положительная в песчаных и отрицательная в глинистых. Она наблюдалась в асфальте Ли и Марквиком ²⁾ и в металлических монокристаллах Вудом ³⁾. В данном случае мы имеем дело с *упругой* дилатансией, существование которой было предсказано Кельвином (1890): «Возможно, что напряжение сдвига может вызывать в изотропном теле сжатие или расширение, пропорциональное квадрату его значения». Модуль упругой дилатансии был определен Рейнером (1948), который получил следующее выражение ⁴⁾:

$$\delta = \frac{\left(\kappa e_v - \frac{s_{\alpha\alpha}}{3} \right)}{4II_{(0)e}}. \quad (29.40')$$

Здесь II_e обозначает второй инвариант тензора упругой деформации, индекс (0) показывает, что речь идет о дивиа-торе.

Следует отметить, что члены, описывающие эти явления, не содержат первых степеней S , однако здесь *нельзя пренебрегать* вторыми степенями даже при бесконечно малых деформациях. В некоторых случаях исследователь бывает *вынужден* опускать эти члены, однако он не должен забывать об их существовании.

γ) *Выражения для деформаций в цилиндрических координатах.* Однородное поле деформаций простого сдвига трудно осуществить экспериментально. Поэтому для экспериментальной проверки развитой здесь теории более пригоден или простой ламинарный сдвиг прямого кругового цилиндра, или сочетание его с чистым растяжением. Ламинарный сдвиг цилиндра показан на рис. 33. Простой сдвиг, изображенный на рис. 31, представляет собой ламинарную деформацию формы, при которой параллельные плоскости движутся одна относительно другой, как в коло-

¹⁾ Reynolds A., Phil. Mag. (2) 20, 469 (1885).

²⁾ Lee A. R., Markwick A. H. D., J. Soc. Chem. Ind. 56, 1461 (1937).

³⁾ Wood W. A., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 172, 231 (1939).

⁴⁾ Здесь δ не следует путать с символом Кронекера.

де карт, причем каждая карта является жесткой. (Карты должны быть при этом бесконечно тонкими.) Если слои представляют собой полые цилиндры, то они или могут скользить один относительно другого в осевом направлении, или вращаться вокруг общей оси. В первом случае

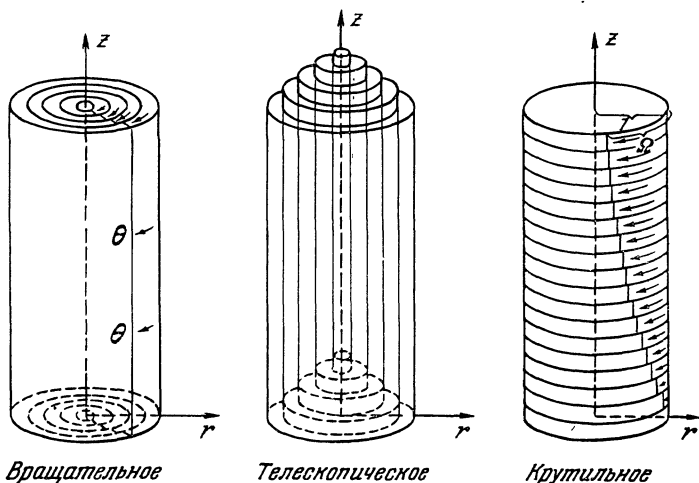


Рис. 33. Ламинарное искажение формы цилиндров.

происходит так называемый телескопический сдвиг, во втором случае — вращательный. Вязко-пластическое течение для этих случаев было рассмотрено в § 14. В третьем случае слои представляют собой плоские диски и мы имеем дело с деформацией кручения. При чистом растяжении (сжатии) цилиндра его ось удлиняется (укорачивается) и радиус уменьшается (увеличивается).

При рассмотрении этих задач будем использовать цилиндрические координаты (7.4). Начальные координаты частицы равны

$$r, x = r_0, \quad \theta, \quad x_0, \quad (29.41)$$

а приращения координат

$$\Delta r = r - r_0, \quad \Delta \theta = \theta - \theta_0, \quad \Delta z = z - z_0. \quad (29.42)$$

Запишем правую часть формулы (29.10) как функцию от приращения координат:

$${}^A 2e_{lm} = g_{lm} - {}_{lm}g + {}_{\alpha m}g [(\Delta x)^\alpha, l] + {}_{l\beta}g [(\Delta x)^\beta, m] - \\ - {}_{\alpha\beta}g [(\Delta x)^\alpha, l] [(\Delta x)^\beta, m]. \quad (29.43)$$

Подставив

$${}_{lm}g = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad g_{lm} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad (29.44)$$

в формулу (29.43)¹⁾, получим:

$$\left. \begin{aligned} 2e_{rr} &= 2 \frac{\partial \Delta r}{\partial r} - \left[\left(\frac{\partial \Delta r}{\partial r} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial r} \right)^2 \right] + 2r \Delta r \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \right)^2 - (\Delta r)^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \right)^2, \\ 2e_{\theta\theta} &= 2 \frac{\Delta r}{r} + 2 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} - \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 - 4 \frac{\Delta r}{r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} - \\ &\quad - \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Delta r}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ &\quad + 2 \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} - 2 \frac{\Delta r}{r} \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} \right)^2, \\ 2e_{zz} &= 2 \frac{\partial \Delta z}{\partial z} - \left[\left(\frac{\partial \Delta r}{\partial z} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial z} \right)^2 \right] + 2r \Delta r \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \right)^2 - (\Delta r)^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \right)^2, \\ 2e_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta z}{\partial \theta} + r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} - 2\Delta r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} - \\ &\quad - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta r}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta r}{\partial z} + r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta z}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta z}{\partial z} \right] + \\ &\quad + \frac{(\Delta r)^2}{r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} + 2\Delta r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} - \frac{(\Delta r)^2}{r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (29.45)$$

¹⁾ В дальнейшем мы используем меру Алманси, но для сокращения записи опускаем индекс A над e . Промежуточная операция между (29.43) и (29.45) заключается в следующем:

$$e_{(lm)} = (g^{ll} g^{mm})^{1/2} e_{lm}.$$

$$\left. \begin{aligned}
 2e_{zr} &= \frac{\partial \Delta r}{\partial z} + \frac{\partial \Delta z}{\partial r} - \\
 &\quad - \left[\frac{\partial \Delta r}{\partial z} \frac{\partial \Delta r}{\partial r} + r^2 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} + \frac{\partial \Delta z}{\partial z} \frac{\partial \Delta z}{\partial r} \right] + \\
 &\quad + 2r \Delta r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} - (\Delta r)^2 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r}, \\
 2e_{r\theta} &= r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta r}{\partial \theta} - 2\Delta r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} - \\
 &\quad - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Delta r}{\partial r} \frac{\partial \Delta r}{\partial \theta} + r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta z}{\partial r} \frac{\partial \Delta z}{\partial \theta} \right] + \\
 &\quad + \frac{(\Delta r)^2}{r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} + 2\Delta r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} - \frac{(\Delta r)^2}{r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta}.
 \end{aligned} \right\} \quad (29.45)$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, получим соотношения (7.9) теории бесконечно малых деформаций.

Чтобы записать уравнения в мерах Грина, в уравнениях (29.45) следует заменить r, θ, z на r_0, θ_0, z_0 ; при этом все отрицательные члены становятся положительными.

В случаях, рассматриваемых выше, существует осевая симметрия и, таким образом, все производные по θ становятся равными нулю. При этом некоторые формулы (29.45) записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 2e_{\theta\theta} &= 2 \frac{\Delta r}{r} - \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2, \\
 2e_{\theta z} &= r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} - 2\Delta r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} + \frac{(\Delta r)^2}{r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z}, \\
 2e_{r\theta} &= r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} - 2\Delta r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} + \frac{(\Delta r)^2}{r} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r}.
 \end{aligned} \right\} \quad (29.46)$$

Выражения еще более упрощаются для ламинарных перемещений. В этом случае $\Delta r = 0$ и мы получим:

$$\left. \begin{aligned}
 2e_{rr} &= -r^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial r} \right)^2, \\
 e_{\theta\theta} &= 0, \\
 2e_{zz} &= 2 \frac{\partial \Delta z}{\partial z} - r^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial z} \right)^2, \\
 2e_{\theta z} &= r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z},
 \end{aligned} \right\} \quad (29.47)$$

$$\left. \begin{aligned} 2e_{zr} &= \frac{\partial \Delta z}{\partial r} - r^2 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} - \frac{\partial \Delta z}{\partial z} \frac{\partial \Delta z}{\partial r}, \\ 2e_{r\theta} &= r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (29.47)$$

Наконец, применим эти зависимости к трем случаям, для которых $\Delta z = 0$, и получим:

i) *Кручение.*

$$\left. \begin{aligned} 2e_{rr} &= -r^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \right)^2, & 2e_{zz} &= -r^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \right)^2, \\ 2e_{\theta z} &= r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z}, & 2e_{zr} &= -r^2 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r}, \\ 2e_{r\theta} &= r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r}, & e_{\theta\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.48)$$

Пусть цилиндр имеет длину l и Ω/l — угол закручивания на единицу длины, при этом

$$\Delta \theta = \frac{\Omega}{l} z. \quad (29.49)$$

Переходя к бесконечно малым деформациям, имеем:

$$2\varepsilon_{lm}^A = \frac{r\Omega}{l} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{r\Omega}{l} \end{vmatrix}. \quad (29.50)$$

Сравнивая выражения (29.50) и (29.22), мы видим, что первое может быть получено из последнего заменой S на $\frac{r\Omega}{l}$. На основании формул (29.34) и (29.35) мы можем записать:

$$2\varepsilon_{lm}^G = \frac{r\Omega}{l} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r\Omega}{l} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (29.51)$$

$$2\varepsilon_{lm}^H = \frac{r\Omega}{l} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r\Omega}{2l} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{r\Omega}{2l} \end{vmatrix}. \quad (29.52)$$

(ii) *Совместное кручение с растяжением.* Возвращаясь к формулам (29.45), запишем ¹⁾:

$$\Delta r = -\varepsilon_t r, \quad \Delta \theta = \frac{\Omega z}{l}, \quad \Delta z = \varepsilon_l z, \quad (29.53)$$

где Ω — угол закручивания цилиндра, l — его длина, Δl — удлинение и

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta R}{R}, \quad (29.54)$$

где R — радиус и ΔR — поперечное сжатие цилиндра. Компоненты деформации определяются зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} 2e_{rr} &= 2e_{\theta\theta} = -\varepsilon_t (2 + \varepsilon_t), \\ 2e_{zz} &= \varepsilon_l (2 - \varepsilon_l) - \left(\frac{r\Omega}{l}\right)^2 (1 + \varepsilon_t)^2, \\ 2e_{\theta z} &= \frac{r\Omega}{l} (1 + \varepsilon_t)^2, \\ 2e_{zr} &= 2e_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.55)$$

Для бесконечно малых деформаций мы можем пренебречь величинами ε_l и ε_t по сравнению с единицей и таким образом найдем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{\theta\theta} = -\varepsilon_t, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_l - \frac{1}{2} \left(\frac{r\Omega}{l}\right)^2, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{r\Omega}{2l}, \\ \varepsilon_{zr} &= \varepsilon_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.56)$$

Мы видим отсюда, что при наложении нескольких бесконечно малых деформаций общая деформация может быть определена как сумма составляющих.

(iii) *Вращение слоев.* В случае вращения все частные производные по z в уравнениях (29.48) равны нулю. Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} 2e_{rr} &= -r^2 \left(\frac{\partial \Delta \theta}{\partial r}\right)^2, \quad 2e_{r\theta} = r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \\ e_{zz} &= e_{\theta\theta} = e_{\theta z} = e_{zr} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.57)$$

¹⁾ Индекс l в ε_l означает продольный, индекс t в ε_t — поперечный.

30. Тензорная нелинейность. а) Общие положения.

Полученные в § 29 результаты, согласно которым простой сдвиг сопровождается нормальными напряжениями, причем величина последних *различна для разных мер деформации*, являются довольно неожиданными. Заметим, что величины λ и μ или κ и μ , каковы бы ни были их численные значения, всегда положительны, даже если они зависят от инвариантов деформации. Результаты, полученные в § 29, не могут быть объяснены влиянием на λ и μ деформации e_{lm} посредством ее инвариантов. Неправильный выбор меры деформации может поставить под сомнение экспериментальные результаты. Таким образом, мы вынуждены были признать, что классические уравнения не являются достаточно общими даже для бесконечно малых деформаций. Рейнером (Reiner (1948)) было предложено обобщенное уравнение

$$s_{lm} = F_0 \delta_{lm} + 2\mu e_{lm} + 4\mu_c e_{l\alpha} e_{\alpha m}. \quad (30.1)$$

Введение μ_c , независимого *модуля поперечной упругости*, позволяет избежать упомянутой выше трудности. Эта формула может быть получена из выкладок § 7, γ следующим образом. Пусть общая зависимость между напряжениями и деформациями имеет вид

$$s_{lm} = F(e_{no}). \quad (30.2)$$

Используя при этом (7.24), получим (30.1). Выражение (29.1) является, таким образом, вырожденным видом формулы (30.1) при $\mu_c = 0$.

Следует обратить внимание на то, что в соответствии с тождеством Кейли — Гамильтона, приведенным в § 7, формула (30.1) не может быть обобщена *путем добавления других тензорных членов*. Таким образом, существует *единственно* возможный путь для обобщения формулы (30.1) с реологическими константами μ и μ_c , заключающийся в применении методов физической нелинейности, которые практически не ограничивают числа членов, зависящих от *компонент* деформации. Однако по этим же причинам значение упомянутого метода невелико.

б) *Нелинейная упругость*. Приведем примеры нелинейной упругости при бесконечно малых деформациях, когда нелинейность является чисто *тензорной* и модули

упругости являются по этой причине константами. Рейнер¹⁾ использовал экспериментальные данные Пойнтинга (P o u n t i n g (1909, 1912)), которые приводятся в § 31, для вычисления модулей упругости некоторых металлов при *конечных деформациях*. Результаты показали, что модуль поперечной упругости имеет в этих случаях тот же порядок величины, что и модуль сдвига μ . Будем считать, что такое соотношение между μ и μ_c всегда имеет место. Для примера исследуем три случая, упоминаемые в § 29. Сначала мы, используя меру Алманси, получим выражения для компонент напряжений. Затем, переходя к бесконечно малым деформациям, мы будем пренебрегать бесконечно малыми членами по сравнению с величинами, равными или большими 1.

(i) *Совместное кручение с растяжением*. Из (29.55) получим зависимости:

$$\left. \begin{aligned} 4(e_{r\alpha})(e_{\alpha r}) &= \varepsilon_t^2 (2 + \varepsilon_t)^2, \\ 4(e_{\theta\alpha})(e_{\alpha\theta}) &= \varepsilon_t^2 (2 + \varepsilon_t)^2 + \left(\frac{r\Omega}{l}\right)^2 (1 + \varepsilon_t)^4, \\ 4(e_{z\alpha})(e_{\alpha z}) &= \left(\frac{r\Omega}{l}\right)^2 (1 + \varepsilon_t)^4 + \\ &\quad + \left[\varepsilon_t (2 - \varepsilon_t) - \left(\frac{r\Omega}{l}\right)^2 (1 + \varepsilon_t)^2 \right]^2, \\ 4(e_{\theta\alpha})(e_{\alpha z}) &= - \left[\varepsilon_t (2 + \varepsilon_t) - \varepsilon_t (2 - \varepsilon_t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r\Omega}{l}\right)^2 (1 + \varepsilon_t)^2 \right] \frac{r\Omega}{l} (1 + \varepsilon_t)^2, \\ 4(e_{r\alpha})(e_{\alpha\theta}) &= 4(e_{z\alpha})(e_{\alpha r}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.3)$$

Формула (30.1) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} s_{rr} &= F_0 + \varepsilon_t (2 + \varepsilon_t) [-\mu + \mu_c \varepsilon_t (2 + \varepsilon_t)], \\ s_{\theta\theta} &= F_0 + \varepsilon_t (2 + \varepsilon_t) [-\mu + \mu_c \varepsilon_t (2 + \varepsilon_t)] + \\ &\quad + \mu_c \left(\frac{r\Omega}{l}\right)^2 (1 + \varepsilon_t)^4, \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

¹⁾ R e i n e r M., Appl. Sci. Res. A 5, 281—295 (1955).

$$\left. \begin{aligned} s_{zz} &= F_0 + \mu \left[\varepsilon_l (2 - \varepsilon_l) - \left(\frac{r\Omega}{l} \right)^2 (1 + \varepsilon_t)^2 \right] + \\ &\quad + \mu_c \left\{ \left(\frac{r\Omega}{l} \right)^2 (1 + \varepsilon_t)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\varepsilon_l (2 - \varepsilon_l) - \left(\frac{r\Omega}{l} \right)^2 (1 + \varepsilon_t)^2 \right]^2 \right\}, \\ s_{r\theta} &= s_{zr} = 0, \\ s_{\theta z} &= \mu \frac{r\Omega}{l} (1 + \varepsilon_t)^2 - \mu_c \left[\varepsilon_l (2 + \varepsilon_t) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_l (2 - \varepsilon_l) + \left(\frac{r\Omega}{l} \right)^2 (1 + \varepsilon_t)^2 \right] \frac{r\Omega}{l} (1 + \varepsilon_t). \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

Заметим, что при бесконечно малых деформациях величины ε_l и ε_t имеют тот же порядок малости, как и $(r\Omega/l)^2$, в связи с чем компоненты напряжений можно определить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} s_{rr} &= F_0 - 2\mu\varepsilon_t, \\ s_{\theta\theta} &= F_0 - 2\mu\varepsilon_t + 4\mu_c \left(\frac{r\Omega}{2l} \right)^2, \\ s_{zz} &= F_0 + 2\mu \left[\varepsilon_l - 2 \left(\frac{r\Omega}{2l} \right)^2 \right] + 4\mu_c \left(\frac{r\Omega}{2l} \right)^2, \\ s_{r\theta} &= s_{zr} = 0, \quad s_{\theta z} = \mu \frac{r\Omega}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

(ii) *Кручение*. В случае кручения мы можем вычислить поперечные члены из уравнений (30.3), полагая $\varepsilon_l = 0$. Аналогично определяются из (30.5) компоненты напряжений. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} s_{rr} &= F_0, \\ s_{\theta\theta} &= F_0 + 4\mu_c \left(\frac{r\Omega}{2l} \right)^2, \\ s_{zz} &= F_0 - \mu \left(\frac{r\Omega}{l} \right)^2 + 4\mu_c \left(\frac{r\Omega}{2l} \right)^2, \\ s_{r\theta} &= s_{zr} = 0, \\ s_{\theta z} &= \mu \frac{r\Omega}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

(iii) *Вращение слоев.* Члены, определяющие эффект поперечной упругости, найдем из выражений:

$$\left. \begin{aligned} 4(e_{r\alpha})(e_{\alpha r}) &= r^2 \left(\frac{\partial \Delta\theta}{\partial r} \right)^2 \left[1 + r^2 \left(\frac{\partial \Delta\theta}{\partial r} \right)^2 \right], \\ 4(e_{\theta\alpha})(e_{\alpha\theta}) &= r^2 \left(\frac{\partial \Delta\theta}{\partial r} \right)^2, \\ (e_{z\alpha})(e_{\alpha z}) &= 0, \quad 4(e_{r\alpha})(e_{\alpha\theta}) = -r^3 \left(\frac{\partial \Delta\theta}{\partial r} \right)^3, \\ (e_{\theta\alpha})(e_{\alpha z}) &= (e_{z\alpha})(e_{\alpha r}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.7)$$

Для бесконечно малых деформаций напряжения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} s_{rr} &= F_0 - r^2 \left(\frac{d \Delta\theta}{dr} \right)^2 (\mu - \mu_c), \\ s_{\theta\theta} &= F_0 + \mu_c r^2 \left(\frac{d \Delta\theta}{dr} \right)^2, \\ s_{zz} &= F_0, \quad s_{r\theta} = \mu r \frac{d \Delta\theta}{dr}, \\ s_{\theta z} &= s_{zr} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.8)$$

31. Эффект Пойнтинга. Изложенные в предыдущем разделе положения нашли применение для объяснения так называемого эффекта Пойнтинга.

Обычным методом определения величины модуля сдвига μ является испытание на кручение длинного, сравнительно тонкого, прямого кругового цилиндра. Несмотря на многочисленные испытания на кручение металлических проволок, выполняемые лабораториями всего мира, никто, за исключением упомянутых здесь исследователей, не определял при этом изменения длины l и радиуса R проволоки ¹⁾. Частично это положение связано с экспериментальными трудностями, в основном же оно вызвано выводами классической теории упругости, согласно которой такого рода явлений при малых деформациях не должно наблюдаться.

Исключениями являются работы Пойнтинга (P o u n t i n g (1909, 1912)). Приблизительно пятьдесят лет тому

¹⁾ Совсем недавно такие измерения были выполнены.

назад, наблюдая закручивание стальных и медных проволок под действием момента пары сил, он установил, что проволока не только закручивается, но также упруго удлиняется и увеличивается в объеме. Эти опыты никем не повторялись и были забыты, поэтому мы коснемся их более подробно.

Опыты проводились с тонкими проволоками, подвешиваемыми вертикально; верхний конец закреплялся. Чтобы устранить случайные изгибы, к проволоке прикладывалась небольшая растягивающая сила. Было показано, что эта вытяжка не влияет на результаты измерений. Нижний конец проволоки закручивался в пределах упругой области. Температура поддерживалась почти постоянной; процесс, таким образом, был близок к изотермическому. Были испытаны четыре стальные фортепианные струны, две медные и одна латунная проволоки. Главные результаты опыта, выражаясь словами Пойнтинга, заключались в следующем: «При закручивании проволока удлиняется, причем величина удлинения не зависит от того, происходит ли закручивание по или против часовой стрелки. Удлинение примерно пропорционально квадрату угла закручивания. При заданном угле закручивания удлинение пропорционально квадрату радиуса. Диаметр проволоки при закручивании уменьшается, причем величина радиального сжатия также пропорциональна квадрату угла закручивания». Дополнительными опытами Пойнтинг убедительно показал также, что удлинение при закручивании не вызывается изменением модуля Юнга. В таблице 7 представлены результаты исследований для двух стальных проволок и одной медной, изложенные во второй работе автора, где наряду с удлинением измерялось также и радиальное сжатие.

Так как величина $2\pi R/l$ пренебрежимо мала по сравнению с единицей, деформации можно считать бесконечно малыми. Величины растяжения $\bar{\epsilon}_l$ и поперечного сжатия $\nu_c \bar{\epsilon}_l$ на один оборот проволоки пренебрежимо малы по сравнению с единицей и $R\Omega/l$, однако они сравнимы с $(R\Omega/l)^2$. Поэтому пренебрегать $\bar{\epsilon}_l$ и $\nu_c \bar{\epsilon}_l$ по сравнению с $(R\Omega/l)^2$ нельзя. Таким образом, в противоположность представлениям классической теории, эффекты второго поряд-

Таблица 7

Результаты наблюдений Пойнтинга
(длина проволоки 160,5 см)

1	Материал	Сталь		Медь
2	$2R, \text{ см}$	0,0986	0,1210	0,1219
3	$\bar{\epsilon}_l = \Delta l / l$ на один оборот	$1,71 \times 10^{-6}$	$2,90 \times 10^{-6}$	$4,25 \times 10^{-6}$
4	$\nu_{c\bar{\epsilon}} = \Delta R / R$ на один оборот	$0,319 \times 10^{-6}$	$0,524 \times 10^{-6}$	$1,75 \times 10^{-6}$
5	ϵ_v на один оборот	$1,07 \times 10^{-6}$	$1,85 \times 10^{-6}$	$0,75 \times 10^{-6}$
6	$E, \text{ дин/см}^2$	$2,12 \times 10^{12}$	$2,12 \times 10^{12}$	$1,31 \times 10^{12}$
7	$\mu, \text{ дин/см}^2$	$0,835 \times 10^{12}$	$0,825 \times 10^{12}$	$0,493 \times 10^{12}$
8	ν	0,270	0,287	0,331
9	$\nu_c = \bar{\epsilon}_t / \bar{\epsilon}_l$	0,187	0,181	0,41
10	Максимальное число оборотов проволоки	4	3	1
11	$\kappa, \text{ дин/см}^2$	$1,53 \times 10^{12}$	$1,65 \times 10^{12}$	$1,29 \times 10^{12}$
12	$2\pi R / l$	0,00193	0,00237	0,00239
13	$(2\pi R / l)^2$	$3,7 \times 10^{-6}$	$5,6 \times 10^{-6}$	$5,7 \times 10^{-6}$
14	$c = \mu_c / \mu$	-2,40	-2,90	-6,40
15	$\mu_c, \text{ дин/см}^2$	$-2,000 \times 10^{12}$	$-2,393 \times 10^{12}$	$-3,155 \times 10^{12}$
16	$\delta, \text{ дин/см}^2$	$-0,885 \times 10^{12}$	$-1,108 \times 10^{12}$	$-0,346 \times 10^{12}$

ка становятся заметными. Попытки теоретического обоснования наблюдаемых явлений, предпринятые Пойнтингом, нельзя признать удовлетворительными. Его экспериментальная техника была превосходной, но математический аппарат для теоретического анализа не был достаточно разработан, в частности в области тензорного исчисления. Эта задача рассмотрена в § 30, β (i). Применяя уравнения равновесия (7.10) и пренебрегая объемными силами, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_0}{dr} &= \mu_c r \left(\frac{\Omega}{l} \right)^2, \\ \frac{\partial F_0}{\partial \theta} &= \frac{\partial F_0}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

откуда

$$F_0 = \frac{\mu_c}{2} \left(\frac{r\Omega}{l} \right)^2 + C \quad (31.2)$$

и

$$s_{rr} = 2\mu\varepsilon_t + \frac{\mu_c}{2} \left(\frac{r\Omega}{l} \right)^2 + C. \quad (31.3)$$

Из условия, что напряжения не действуют на боковую поверхность цилиндра ($r=R$), определим C :

$$C = 2\mu\varepsilon_t - \frac{\mu_c}{2} \left(\frac{R\Omega}{l} \right)^2. \quad (31.4)$$

Таким образом,

$$F_0 = 2\mu\varepsilon_t - \frac{\mu_c}{2} \left(\frac{\Omega}{l} \right)^2 (R^2 - r^2) \quad (31.5)$$

и

$$s_{zz} = \mu \left[2\varepsilon_t + 2\varepsilon_l - \left(\frac{r\Omega}{l} \right)^2 \right] + \mu_c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{l} \right)^2 (3r^2 - R^2) \right]. \quad (31.6)$$

Из соотношения (31.6) получим:

$$\begin{aligned} P_z &= 2\pi \int_0^R s_{zz} r \, dr = \\ &= R^2 \pi \left\{ \mu \left[2\varepsilon_t + 2\varepsilon_l - \frac{1}{2} \left(\frac{R\Omega}{l} \right)^2 \right] + \mu_c \left(\frac{R\Omega}{2l} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (31.7)$$

Для простого кручения $P_z=0$. Следовательно, в этом случае

$$\mu_c = 2\mu \left[1 - \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_t}{\left(\frac{R\Omega}{2l} \right)^2} \right]. \quad (31.8)$$

Подставляя в эту формулу значения $\bar{\varepsilon}$ и v_c из таблицы 7, определяем отношение $c = \mu_c/\mu$, значения которого приводятся в четырнадцатой строке этой таблицы, а значения μ_c — в пятнадцатой.

Изменение объема, так же как и в теории бесконечно малых деформаций, определится формулой

$$e_v = \varepsilon_l (1 - 2v_c). \quad (31.9)$$

Очевидно, что e_v , как и ε_l , пропорционально квадрату угла закручивания. Коэффициент Пуассона вычисляется

из E и μ в соответствии с известной формулой (см. (10.6) и (10.7)):

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (31.10)$$

Значения его, приведенные в восьмой строке таблицы, значительно больше, чем ν_c . В связи с этим наблюдаемая в опытах Пойнтинга объемная деформация больше объемной деформации ε_v , определяемой формулой

$$\varepsilon_v = \frac{s_m}{\kappa}. \quad (31.11)$$

Деформация ε_v вызывается нормальным напряжением s_m или, что то же, изотропной компонентой тензора s_{lm} :

$$s_m = \frac{1}{3} s_{\alpha\alpha}. \quad (31.12)$$

Разность

$$e_d = e_v - \varepsilon_v \quad (31.13)$$

определяет упругую дилатансию. Понятие дилатансии было дано выше, в § 29. Рейнером ¹⁾ в соответствии с уравнением (29.40') был вычислен модуль упругой дилатансии. Из таблицы 7, где в шестнадцатой строке приведены значения этого модуля, видно, что он является отрицательным. Отрицательный знак модуля дилатансии показывает, что для осуществления простого сдвига в дополнение к касательным напряжениям необходимо приложить всестороннее давление, в противном случае простой сдвиг будет сопровождаться *увеличением* объема.

Из экспериментальных данных Пойнтинга следует, что закон упругости для металлов может быть записан в форме (30.1), причем модуль поперечной упругости $\mu_c \neq 0$, а значения модулей μ и μ_c являются постоянными. Этот закон не противоречит опытным данным. Таким образом, крутящий момент вызывает у прямого кругового цилиндра: (а) закручивание без удлинения, если $\mu_c = 2\mu$, (б) удлинение цилиндра, если $\mu_c < 2\mu$, и (с) укорочение цилиндра, если $\mu_c > 2\mu$. Для двух металлов, исследованных Пойнтин-

¹⁾ Reiner M., Appl. Sci. Res. A 5, 281—295 (1955).

гом, наблюдалось удлинение; другие экспериментальные данные такого рода неизвестны, Свифт ¹⁾, исследовавший пластическое кручение металлических цилиндров, показал, что большая часть металлов при этом удлиняется, однако цилиндры из свинца, не упрочняющегося при наклепе, при закручивании сжимались. Поскольку пластические деформации металлов тесно связаны с упругими, мы на основании опытов Свифта можем предположить, что аналогичные явления будут наблюдаться и в упругой области.

Аналогичным образом теория подтверждает существование положительной или отрицательной дилатансии. В двух металлах, исследованных Пойнтингом, наблюдалась положительная дилатансия — напряжения сдвига вызывали увеличение объема. Можно ожидать, что у свинца объем будет уменьшаться.

Здесь применялась лишь одна мера деформации, а именно мера Алманси. Применение других мер может вызвать изменение численного значения модуля μ_c , который, однако, будет оставаться константой.

Поскольку теория, описанная в § 30, подтверждается для двух металлов экспериментальными данными Пойнтинга, можно предполагать, что она пригодна для описания упругого поведения всех поликристаллических металлов.

32. Эффекты второго порядка при вязком течении. Полагая, что тензор скоростей деформации f_{lm} однозначно определяется формулой (3.10), так же как d_{lm} определялось уравнением (3.8), мы можем описать эффекты второго порядка при вязком течении, если зависимость (15.11), записываемую в виде

$$s_{lm} = F_0 \delta_{lm} + 2\eta f_{lm}, \quad (32.1)$$

обобщим, следуя Рейнеру (R e i n e r (1945)), по аналогии с соотношением (30.1) следующим образом:

$$s_{lm} = F_0 \delta_{lm} + 2\eta f_{lm} + 4\eta_c f_{la} f_{am}. \quad (32.2)$$

Трусделл (T r u e s d e l l (1952)) назвал жидкость, подчиняющуюся реологическому уравнению (32.2), жид-

¹⁾ Swift H. W., Engineering, 1947.

костью Рейнера — Ривлина. Ривлин¹⁾, а также Браун и Рейнер²⁾ предложили уравнения, описывающие поведение такого рода жидкости в различных приборах. Тема рассмотрена более детально в других томах «Handbuch der Physik». Здесь мы коротко остановимся на двух случаях.

а) *Простое ламинарное течение.* При этом

$$v_x = Gy, \quad v_y = v_z = 0 \quad (32.3)$$

и

$$s_{lm} = F_0 \delta_{lm} + \eta G \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \eta_c G^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (32.4)$$

Если в направлении оси z действует давление Π , то

$$s_{zz} = F_0 = -\Pi. \quad (32.5)$$

Отсюда определяется неизвестная величина F_0 , которая для данного случая является постоянной.

Поперечные напряжения зависят от коэффициента поперечной вязкости η_c , и, если последняя равна нулю, они исчезают. Следует отметить, что в противоположность поперечной упругости, рассмотренной в §§ 29 и 30, оба поперечных напряжения (в направлениях осей x и y) имеют *один и тот же знак*, зависящий от знака η_c . Следовательно, они оба одновременно являются или растягивающими, или сжимающими.

б) *Течение при кручении.* Пусть жидкость заключена в зазоре между двумя дисками, из которых один вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω , а другой, находящийся от него на расстоянии H , неподвижен. Положим

$$v_\theta = r\omega, \quad (32.6)$$

¹⁾ Rivlin R. S., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 193, 260—281 (1948).

²⁾ Braun I., Reiner M., Quart. J. Mech. Appl. Math. 5, 42—53 (1952).

где ω — функция одного z , причем $v_r = v_z = 0$. При этом¹⁾

$$f_{lm} = A \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (32.7)$$

где

$$A = \frac{r}{2} \frac{d\omega}{dz}. \quad (32.8)$$

Из (32.7) получим:

$$f_{l\alpha} f_{\alpha m} = A^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (32.9)$$

Таким образом, имеем:

$$s_{lm} = \begin{vmatrix} F_0 & 0 & 0 \\ 0 & F_0 + A^2 4\eta_c & 2\eta A \\ 0 & 2\eta A & F_0 + A^2 4\eta_c \end{vmatrix}. \quad (32.10)$$

Из второго уравнения движения, пренебрегая инерционными членами, найдем:

$$\omega = \Omega \left(1 - \frac{z}{H} \right). \quad (32.11)$$

Из двух других уравнений следует:

$$s_{rr} = F_0 = \frac{r^2 \Omega^2}{2H^2} \eta_c + K. \quad (32.12)$$

На краю диска, где $r = R$, жидкость имеет свободную поверхность, более или менее вертикальную, где s_{rr} может считаться равным $-\Pi$. Отсюда

$$K = -\frac{R^2 \Omega^2}{2H^2} \eta_c - \Pi \quad (32.13)$$

$$\Pi + F_0 = -\frac{\Omega^2}{2H^2} (R^2 - r^2) \eta_c, \quad (32.14)$$

откуда

$$\Pi + s_{zz} = F_0 + 4A^2 \eta_c = -\frac{\Omega^2}{2H^2} (R^2 - 3r^2) \eta_c. \quad (32.15)$$

¹⁾ Здесь и в следующих главах индексы физических компонент будут для простоты записываться так же, как и в § 7, а.

Таким образом, s_{zz} меняется в зависимости от радиуса по параболическому закону, причем в центре s_{zz} представляет собой напряжение сжатия, которое при $r = R/\sqrt{3}$ переходит в напряжение растяжения.

Границы полостей
Внешняя: цилиндри-
ческий сосуд, вра-
щающийся
Внутренняя:
указана ниже

Жидкости Вейссенберга

Ньютоновы
жидкости

с нулевой скоростью с малой скоростью с большой скоростью

1. Отсутствует

2. Неподвижный цилиндр
(боковой зазор узкий)

3. Неподвижный стержень
(боковой зазор широкий)

4. Неподвижная открытая
труба (зазор у дна узкий)

5. Неподвижная закрытая
труба с круговым от-
верстием (зазор у дна
узкий)

6. Неподвижный диск с
пьезометрами (зазор у
дна узкий)

7. Невращающийся диск
(зазор у дна может
меняться)

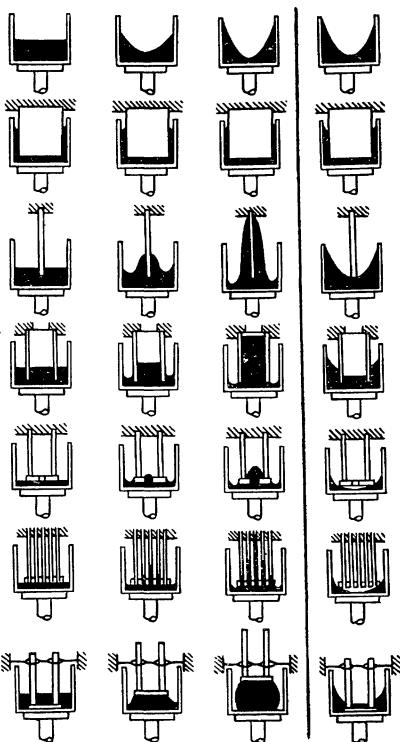


Рис. 34. Эффекты Вейссенберга.

33. Эффект Вейссенберга. На совещании Британского реологического клуба в 1946 г. К. Вейссенберг впервые

демонстрировал весьма странное поведение некоторых очень вязких жидкостей. Эти явления были затем описаны в короткой заметке¹⁾. Если такие жидкости подвергаются сдвигу между вращающимся сосудом и каким-либо внутренним невращающимся элементом, который при этом остается неподвижным или может перемещаться

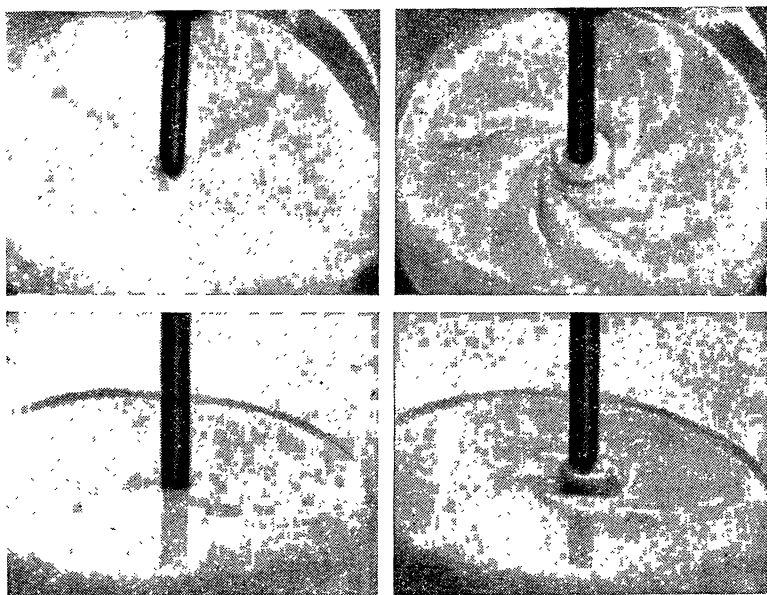


Рис. 35. Подъем по ротору сгущенного молока.

вдоль оси, то жидкость течет *внутрь* и поднимается *вверх* в направлениях, противоположных центробежным и гравитационным силам. Все это устройство образует как бы «центростремительный насос» (рис. 34).

Совокупность этих явлений имеет общее название эффекта Вейссенберга. В простейшем случае эффект Вейссенберга наблюдается при вращении стержня, опущенного в жидкость Вейссенберга; последняя при этом

¹⁾ Weissenberg K., Nature, Lond. 159, 310 (1947).

поднимается по стержню. Рис. 35 демонстрирует это явление для пастеризованного подслащенного сгущенного молока¹⁾. Аналогичный эффект наблюдался также в пористом битуме²⁾. Все жидкости, для которых наблюдался эффект Вейссенберга, как, например, растворы каучука, целлюлозы, крахмала и вообще растворы коллоидов и высокополимеров более или менее сложного строения, обнаруживали упругость формы под действием кратковременных нагрузок или являлись упругими зольми *L*-типа. Очевидно, что если взвешенные в золе упругие элементы деформируются под действием напряжений, обусловленных наличием градиента скорости, то такого рода упругие деформации должны сопровождаться поперечными напряжениями. Упругие поперечные напряжения обуславливают явление центростремительного нагнетающего действия, и это может служить объяснением механизма эффекта Вейссенберга. Такое объяснение и было предложено самим Вейссенбергом³⁾, Бюргерсом⁴⁾ и Муни⁵⁾. Соответствующие теории были развиты Олдройдом⁶⁾ и Де-Уиттом⁷⁾. Эти теории применимы также к упругим гелям, реологическая модель которых изображается телом Максвелла. С другой стороны, эффект может быть обусловлен наличием поперечной вязкости, описанной в предыдущем параграфе. Ривлин⁸⁾, который также принимал эту гипотезу, считал, что поперечные напряжения обусловлены *ориентацией* вытянутых молекул, растворенных или взвешенных в жидкости. Однако в § 32 было показано, что напряжения, обусловленные поперечной вязкостью, *должны распределяться иначе*. Гринсмит и Ривлин⁹⁾ претендовали на экспериментальное подтверждение

1) Reiner M., Scott-Blair G. W., Hawley H. B., J. Soc. Chem. Ind. 68, 327 (1949).

2) Lax Weiner K., Schoenfeld-Reiner R., Bull. Res. Council Israel 2, 66 (1952).

3) Weissenberg K., Proc. 1st Internat. Rheol. Congr. Amsterdam, 1948.

4) Burgers J. M., Proc. Acad. Sci. Amsterdam 51, 787 (1948).

5) Mooney M., J. Coll. Sci. 6, 96 (1951).

6) Oldroyd J. G., Proc. Roy. Soc. Lond. A 202, 345 (1950).

7) De Witt T. W., J. Appl. Phys. 20, 889 (1955).

8) Rivlin R. S., Trans. Faraday Soc. 45, 739 (1949).

9) Greensmith H. W., Rivlin R. S., Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A 245, 899, 399 (1953).

распределения (32.15) для растворов полиизобутилена в ортодихлорбензоле. Их опыты не могут, однако, служить подтверждением гипотезы поперечной вязкости, так как теория вязко-упругости, если ее обобщить путем введения поперечного упругого члена, согласуется с *любым* распределением поперечных давлений. Может быть, когда-либо будет подтверждено и существование поперечной вязкости. Однако Робертс¹⁾ заявил, что он повторил опыты Гринсмита и Ривлина и получил отрицательные результаты. Муни заявил по этому поводу следующее: «Возможно, что существуют жидкости, которые адекватно описываются теорией Рейнера — Ривлина, но я не верю в то, что какая-либо из этих жидкостей обнаружена на сегодняшний день (1954)».

Таким образом, объяснение эффектов Вейссенберга до сих пор остается *открытым вопросом* как при макроскопическом или феноменологическом подходе, так и при микроскопическом или структурном. Вполне возможно, что в различных случаях действуют *различные механизмы*, как различны, например, механизмы упругости у стали и у резины.

34. Идеальное тело Максвелла. Когда Максвелл (Maxwell (1868)) постулировал свое уравнение

$$\dot{s} = E\dot{e} - \frac{s}{T_{\text{rel}}}, \quad (34.1)$$

где e — «некоторая» упругая деформация и E — «коэффициент (модуль) упругости для этого рода упругих деформаций», он имел в виду описание упругого поведения всех тел, в особенности реологического поведения газов. Из своей динамической теории он сделал вывод о том, что воздух представляет собой тело, называемое теперь упруго-вязким, с модулем упругости μ , равным термодинамическому давлению p , с порядком величины $\approx 10^6 \text{ дин/см}^2$ и временем релаксации $T_{\text{rel}} \approx 10^{-10} \text{ сек.}$

По-видимому, его теория никогда не использовалась в аэродинамике. Причина этого становится ясной, если мы запишем уравнение (34.1) в форме

$$Ee = s + \frac{1}{T_{\text{rel}}} \int s \, dt. \quad (34.2)$$

¹⁾ Roberts J. E., Nature 179, 487 (1957).

Вряд ли можно ставить вопрос об экспериментальной проверке этого уравнения. В соответствии с (34.2) деформация e складывается из двух частей: обратимая часть является упругой деформацией, необратимая — обусловлена вязким течением (см. рис. 16). Если T_{rel} очень мало, то вторая часть несравнимо больше, чем первая. Если через какой-то (достаточно малый) промежуток времени t мы снимем нагрузку, то упругая деформация исчезнет, а вязкая останется. Однако первая настолько мала по сравнению с последней, что практически не может наблюдаться, так как находится в пределах ошибок опыта. Эта точка зрения была выражена Джеффрисом (1952) применительно к воде следующими словами: «Если вода имеет модуль упругости порядка 10^{10} , то порядок величины T_{rel} должен составлять $\approx 10^{-12}$ сек, течение должно во много раз превышать упругую деформацию и *введение упругого члена в зависимость напряжений от деформаций не повышает ее точности*». Недавно Рейнером¹⁾, а также Поппером и Рейнером²⁾ было показано, что эта точка зрения является неправильной. Первый наблюдал эффект центростремительного нагнетающего действия в воздухе; последние построили центростремительный компрессор. Эти опыты описываются в следующем параграфе; в данном разделе показано, что тело Максвелла должно обязательно обнаруживать эффект Вейссенберга.

В предыдущем параграфе отмечалось, что вязко-упругие материалы обнаруживают эффект Вейссенберга. Однако из реологического уравнения тела Максвелла (34.1) такой вывод сделать нельзя.

В предпосылках, которые принимал Максвелл при выводе этого уравнения, имеются три момента, которые целесообразно обсудить. Во-первых, не делается различия между полным напряжением, его изотропной компонентой (т. е. всесторонним расширением) и его девиатором (изменением формы или сдвигом). Однако, очевидно, Максвелл имел в виду не релаксацию изотропного напряжения, а девиаторы напряжений и деформаций. Этот

¹⁾ Reiner M., Proc. Roy. Soc. Lond. A 240, 173 (1957).

²⁾ Popper B., Reiner M., Brit. J. Appl. Phys. 7, 452 (1956); 8, 493 (1957).

недостаток был исправлен Рейгером¹⁾, записавшим уравнение (16.2) в компонентах девиаторов. Во-вторых, Максвелл не указал на то, как измерять e . Он отождествлял \dot{e} с f . В § 25 показано, что это может иметь место только в случае применения меры Хенки. Он мог бы возразить, что рассматриваемые упругие деформации являются весьма малыми. При этом способ их определения не имеет значения — все возможные меры сводятся к мере деформации Коши (соотношение (3.8)), скорость которой, в соответствии с формулами (3.10), идентична мере скорости течения, положенной Стоксом в основу его теории вязкой жидкости. Эту скорость и имел в виду Максвелл. Однако, как показано в § 29, это справедливо только в том случае, если мы пренебрегаем поперечными напряжениями. В этом заключается третий недостаток теории Максвелла. Не имея представления о тензорных величинах, он естественно, рассматривал одномерный случай, к которому относится также приведенное замечание Джеффриса. Если уравнение (34.2) переписать в форме

$$\varepsilon_{lm(0)} = \frac{N \left[s_{lm(0)} + \frac{1}{T_{\text{rel}}} \int s_{lm(0)} dt \right]}{2\mu}, \quad (34.3)$$

то из материала § 30 станет ясно, что при некоторых типах течения второй член в квадратных скобках может исчезнуть, причем первый член сохраняет конечное значение. Пусть, например, имеет место ламинарное течение в направлении оси x . Если течение в направлении оси y отсутствует, то возникают упругие поперечные напряжения в этом направлении, которые могут наблюдаться при помощи специального устройства, описанного ниже.

Это явление было предсказано Трусделлом (T r u s d e l l (1952)). Им был предложен безразмерный параметр, названный нами числом Трусделла и определяемый соотношением

$$T = \frac{\eta \dot{\gamma}}{p}, \quad (34.4)$$

где η — вязкость жидкости, $\dot{\gamma}$ — градиент скорости и p — давление воздуха. Трусделл указывал, что при $T \gg 1$

¹⁾ Reiger R., Ber. dtsch. Phys. Ges. 1919, 421—434.

эффект Вейссенберга может иметь место. Если при нормальном атмосферном давлении $\dot{\gamma}$ составляет для воды примерно $7 \times 10^5 \text{ сек}^{-1}$, то порядок $T \approx 1$. Мы можем добавить, что в этом случае величина $\dot{\gamma}$ должна составлять для воздуха приблизительно $2 \times 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Трусделл добавил: «При подъеме в атмосфере (и, следовательно, при снижении p) величина T может быть как угодно большой, в связи с чем этот эффект может найти применение в аэродинамике больших высот». Экспериментальные трудности этого метода очевидны. Другой метод заключается в увеличении градиента скорости $\dot{\gamma}$. Последний увеличивается с ростом относительной скорости V и (или) уменьшением расстояния между движущимися поверхностями d . В центростремительном нагнетателе линии тока являются окружностями, в связи с чем возникают *центробежные* силы. Чтобы вызвать *центростремительный* эффект, последние должны быть преодолены. Так как V нельзя увеличивать бесконечно, то мы должны уменьшать d . Можно ожидать, что зазор между дисками можно уменьшить до такой степени, что его трудно будет поддерживать с заданной точностью. Блотт, проводивший некоторые элементарные реологические исследования, предложил устройство, позволяющее автоматически уменьшать зазор до такой степени, когда становится измеримым эффект Вейссенберга.

35. Эффект центростремительного нагнетания в воздухе. При изучении поведения смазки в шариковых и роликовых подшипниках обнаруживается, что воздушная пленка, увлекаемая вращающимися поверхностями, предотвращает контакт между смазкой и движущейся поверхностью в некоторых частях подшипника. Можно было бы ожидать, что вибрация подшипника будет вызывать достаточное расползание смазки для того, чтобы она поступала навстречу движущейся поверхности, и если однажды контакт установился, то смазка в обойме будет постоянно перемешиваться. Этого, однако, не происходит, откуда следует, что некий «фактор» активно препятствует контакту между смазкой и движущейся поверхностью. Для того чтобы исследовать эффект более тщательно, латунный диск диаметром 6 см и толщиной 0,4 см приводился во враще-

ние со скоростью, изменяющейся в пределах от 3000 до 8000 *об/мин*, а затем постепенно создавался контакт на краю диска с густым слоем смазки. Хотя частицы смазки и увлекались краем диска, при дальнейшем его погружении смазка выдавливалась, не соприкасаясь с диском; при этом между поверхностью последнего и смазкой сохранялся некоторый зазор.

Когда такой же эксперимент был проведен с очень вязким цилиндрическим маслом, то в масле также образовалось углубление и смачивания диска не произошло. Однако жидкими маслами или водой диск смачивался моментально: Аналогичные опыты были проделаны с полым цилиндром. Цилиндр насаживался на вал мощного электродвигателя, причем когда цилиндр соприкасался с маслом и смачивался им, то его невозможно было раскрутить до большой скорости. Однако если цилиндру *вначале* сообщалась угловая скорость ≈ 5000 *об/мин*, то он проходил сквозь масло без смачивания. Если затем скорость уменьшалась примерно до 2500 *об/мин*, контакт наступал мгновенно, затормаживая вращение.

Затем эксперимент был изменен. Цилиндр закрывался крышкой, а сквозь дно масляной ванны пропусклась трубка; высота ее была больше максимального уровня масла внутри цилиндра. Эта трубка вне ванны соединялась с водяным манометром, так что можно было измерять давление внутри цилиндра. Как и раньше, было обнаружено, что можно погружать цилиндр без смачивания. При наблюдениях за давлением воздуха внутри цилиндра было обнаружено, что при скоростях около 6000 *об/мин* оно отрицательно, но неожиданно становится положительным *при снижении скорости* приблизительно до 4000 *об/мин*. При дальнейшем снижении скорости происходило смачивание цилиндра маслом, как и раньше.

Это устройство пригодно, таким образом, для исследования центростремительного эффекта в воздухе. Как можно было наблюдать, в описанном эксперименте масло, благодаря своей высокой вязкости, движется настолько медленно, что его скорость пренебрежимо мала по сравнению со скоростью стенки цилиндра. Таким образом, здесь мы имеем дело с высокой скоростью V цилиндра относительно масла. Толщина воздушного слоя d , безусловно,

очень мала, а поэтому градиент скорости настолько велик, что уже при нормальном атмосферном давлении числа Трусделла весьма велики. Неизвестно, чему равно расстояние d , но это и не важно, так как оно автоматически поддерживается на нужном уровне. Развиваемое при этом поперечное давление, препятствующее контакту между маслом и движущейся поверхностью, уравнивает гидростатическое давление масла. Это и есть тот «фактор», о котором упоминалось выше. Если расстояние d вдруг станет меньше, то градиент скорости растет, а следовательно, будет расти и поперечное давление. При этом жидкость отступит, градиент скорости, а с ним и поперечное давление будут уменьшаться до тех пор, пока это давление не уравнивается гидростатическим давлением. Понятно также, почему происходит смачивание маслом низкой вязкости: такое масло легко приводится во вращательное движение, и разность скоростей V при этом значительно снижается. По той же причине происходит смачивание цилиндра при снижении его угловой скорости.

Воздушный зазор между металлическим цилиндром и коаксиальным цилиндром, выполненным из битума, поддерживается благодаря одному из поперечных напряжений, которое в случае меры деформации Хенки есть давление. Другое поперечное напряжение, действующее в направлении потока и представляющее собой растяжение, вызывает давление стягивания, обуславливающее нагнетание.

На основе этих экспериментальных факторов Поппер и Рейнер сконструировали и построили цельнометаллический центростремительный воздушный нагнетатель. Схематически он представляет собой две круглые металлические пластинки диаметром около 5 см, из которых одна неподвижна, а другая вращается относительно первой так, что между ними образуется узкий регулируемый зазор. Когда зазор уменьшается приблизительно до 0,02 мм, а ротор имеет угловую скорость около 10 000 об/мин, то воздух засасывается в зазор в направлении к центру. Они построили также центростремительный вакуумный насос¹⁾.

¹⁾ Подробное описание: Popper B., Reiner M., Grenzschichtforschung. Symposium Freiburg/Br. 26 bis 29 August 1957, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, S. 224, 1958.

III. Прочность.

Мы отмечали в § 6, что деформации, которые может испытывать тело, ограничиваются прочностью материала тела. Таким образом, учение о прочности должно быть включено в реологию.

36. Классические критерии. Качественно прочность представляет собой сопротивление материала *пластической деформации* или *разрушению*. Для того чтобы установить критерий прочности, мы должны иметь в виду, что внешние силы должны произвести работу для совершения пластической деформации или доведения тела до разрушения. Таким образом, мы приходим к теории, впервые предложенной Бельтрами, согласно которой материал разрушается, когда работа напряжений w , превосходит некоторый предел. Эта теория легко опровергается, если рассматривать ее применительно к всестороннему сжатию. Бельтрами не видел существенного различия в поведении материалов при всестороннем расширении (положительном или отрицательном) и формоизменении. Принимая во внимание это обстоятельство, Хенки в своей теории пластической прочности считал, что пластичность при деформациях объема не проявляется. Это положение обычно принимается без возражений, но, как отмечалось Кельвином в примере, упомянутом в § 1, оно может рассматриваться лишь как первое приближение. Пренебрегая пластичностью при деформациях объема, Хенки¹⁾ выдвинул гипотезу о том, что материал пластически течет в том случае, если удельная энергия формоизменения $w_{(0)}$ достигнет или превзойдет некоторый предел. Хубер²⁾ применял аналогичную гипотезу разрушения. Он полагал, что объемная прочность материала по отношению к всестороннему давлению теоретически не ограничена, хотя на практике материалы могут разрушаться вследствие раздавливания вблизи пор и пустот. При всестороннем расширении под действием изотропного растягивающего напряжения, если последнее превышает

1) Hencky H., Proc. 1st Internat. Congr. Mech. Delft, 1924; Z. angew. Math. Mech. 4, 323—334 (1924).

2) Huber M. T., Czasopismo Techniczne, Lemberg (Lwów) 22, 81 (1904).

сцепление частиц материала, может произойти хрупкое разрушение. Обращаясь к формоизменению, он предположил (до Хенки), что материал разрушается в том случае, если работа девиатора напряжений $w_{(0)}$ станет равной некоторому пределу или превзойдет его. Обе эти теории могут, таким образом, рассматриваться как модификации ранее предложенной теории Бельтрами. Однако обе эти теории не учитывают одного момента. Для пластического течения или для разрушения материала должна *затрачиваться* работа. Если часть работы напряжений рассеивается в ходе деформации и превращается в тепло, то эта часть не может вызвать ни разрушения, ни пластического течения. Возвращаясь к уравнению (5.6), мы, следуя Рейнеру и Вейссенбергу¹⁾, можем сказать, что такого рода работой в теориях как Хубера, так и Хенки является *работа упругой деформации*. Другими словами, *прочность представляет собой предельную работу, до которой материал может быть упруго деформирован*. В соответствии с определением упругой работы согласно уравнению (5.6) могут существовать два таких предела, из которых один связан с деформациями объема, а другой — с формоизменением. Максимальная работа упругих деформаций называется *предельной упругостью*²⁾ (E), и при этом мы можем записать:

$$\Phi = w_e \leq E. \quad (36.1)$$

Кроме того, мы должны различать E_v , $E_{(0)}$, пластическую E_{pl} и предельную упругость при разрушении E_b . Буквой E обозначается упругая энергия. Предел E_{pl} называют *критерием текучести* Хенки, а E_b — *критерием прочности* Хубера.

В случае трех классических тел, рассмотренных в главе А, II (стр. 33—40), это различие не проявляется. Как тело Гука, так и тело Сен-Венана — Прандтля считаются идеально упругими вплоть до разрушения, а ньютонова

¹⁾ Reiner M., Weissenberg K., Rheolog. Leaflet 1939, № 10, 12.

²⁾ «Resilience». Иногда этот термин переводится как «резильянс» (см., например, «Реология. Теория и приложения», под редакцией Ф. Эйриха, ИЛ, М., 1962, стр. 74—77; Рейнер М., «Деформация и течение», Гос. изд. нефт. и горн.-топл. лит., М., 1963, стр. 114). (Прим. ред.)

жидкость вообще не обладает какой-либо прочностью по отношению к формоизменению. Следовательно, к этим случаям применимы критерии и Хубера, и Хенки.

На основании реологического уравнения (9.1) мы из формулы (9.3) получим критерий разрушения при деформациях объема в виде, обычном для трех классических типов разрушения:

$$\bar{w}_v = \frac{\kappa}{2} \bar{\epsilon}_v^2 = \frac{1}{2\kappa} \vartheta_v^2 = E_v, \quad (36.2)$$

где \bar{w}_v — максимальная работа деформации, а $\bar{\epsilon}_v$ — максимальное объемное расширение, соответствующее всестороннему растягивающему напряжению ϑ_v . Из (36.2) имеем:

$$\vartheta_v = +\sqrt{2\kappa E_v}, \quad \epsilon_v = +\sqrt{\frac{2E_v}{\kappa}}. \quad (36.3)$$

В уравнениях (36.3) мы используем только положительный знак, имея в виду, что для большей части материалов величина $-\vartheta_v$ неизмеримо велика.

Далее, рассматривая тело Гука, из уравнений (5.7) и (10.10) имеем:

$$\bar{w}_0 = \frac{\vartheta_{\alpha\beta(0)} \vartheta_{\alpha\beta(0)}}{4\mu} = E_{(0)}. \quad (36.4)$$

Раскрывая немые индексы и используя декартовы координаты, получим:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\alpha\beta(0)} \vartheta_{\alpha\beta(0)} = \vartheta_{xx(0)}^2 + \vartheta_{yy(0)}^2 + \vartheta_{zz(0)}^2 + 2\vartheta_{yz(0)}^2 + \\ + 2\vartheta_{zx(0)}^2 + \vartheta_{xy(0)}^2. \end{aligned} \quad (36.5)$$

Сравнение этого выражения с (7.15) показывает, что условие (36.4) может быть записано в форме

$$-\Pi_{s(0)} = 2\mu E_{(0)}. \quad (36.6)$$

Записывая E_{pl} вместо E , получим *критерий текучести Мизеса*. Но Мизес¹⁾ получил свой критерий (до Хенки) не из энергетических соображений. Он считал, что прочность является скалярной величиной, т. е. скалярной функцией напряжений, и, следовательно, является функ-

¹⁾ Mises R., v., Göttingen Nachr. math.-phys. Kl. 1913, 528.

цией инвариантов тензора напряжений. Первый инвариант девиатора напряжений равен нулю, и прочность при формоизменении определяется главным образом вторым инвариантом. Часто говорят о критерии текучести Мизеса — Хенки, не замечая при этом, что два отмеченных критерия совпадают только для тел, которые ведут себя в упругой области, как тело Гука. В этом случае критерий прочности может быть также выражен посредством максимальной деформации, а не максимального напряжения, поскольку здесь существует взаимно однозначная зависимость между ними. Предельная упругость является совместным инвариантом разрушающих напряжений и деформации при разрушении. Этот совместный инвариант является критерием теории Хенки, тогда как теория Мизеса рассматривает второй инвариант напряжений или деформации. Если материал не представляет собой (в упругой области) тела Гука, то эти три инварианта имеют различные значения.

37. Реологические критерии. Покидая область тел Гука и рассматривая прочность материала, обнаруживающего вязкую деформацию или течение, мы должны иметь в виду различие между работой напряжений и работой упругой деформации.

а) Если работа напряжений для тела Гука полностью переходит в потенциальную энергию, то для ньютоновой жидкости только работа деформации объема превращается в потенциальную энергию, а мощность, затраченная на формоизменение, непрерывно и полностью рассеивается.

Таким образом, ньютонова жидкость имеет прочность при изотропной деформации, практически бесконечную при сжатии и значительную при растяжении, но не обладает прочностью при сдвиге. Прочность при изотропном растяжении проявляется только у однородной жидкости, не имеющей пузырьков воздуха. Явление кавитации, при котором у твердого тела (например, чугуна), соприкасающегося с потоком воды, выламываются отдельные зерна, происходит, в частности, за счет прочности воды, превосходящей прочность твердого тела¹⁾.

¹⁾ Reiner M., Engineering 1943, 454.

β) Для твердого тела Кельвина из уравнения (15.2) находим:

$$\dot{w}_{(0)} = s\dot{\epsilon} = 2\mu\dot{\epsilon} + 2\eta_s(\dot{\epsilon})^2. \quad (37.1)$$

Поэтому условие пластического или хрупкого разрушения при формоизменении принимает вид

$$\int (\dot{w}_{(0)} - 2\eta_s\dot{\epsilon}^2) dt = 2\mu \int_0^{\epsilon_f} \epsilon\dot{\epsilon} dt = \mu\epsilon_f^2 = E_{(0)}, \quad (37.2)$$

где ϵ_f — деформация, при которой происходит разрушение.

Из соотношения (37.2) получим:

$$\epsilon_f = \sqrt{\frac{E_0}{\mu}}, \quad (37.3)$$

и, принимая во внимание уравнение (15.2), имеем:

$$s_{sf} = 2\sqrt{E_0\mu} + 2\eta_s\dot{\epsilon} = s_{sf} + 2\eta_s\dot{\epsilon}, \quad (37.4)$$

где s_{sf} представляет собой предельное напряжение, за которым происходит статическое разрушение.

Следовательно, твердое тело Кельвина разрушается путем изменения формы, если упругая деформация достигает определенного предела ϵ_f , соответствующего условию (37.3), тогда как напряжение s_f , при котором происходит разрушение материала, возрастает вместе со скоростью деформации. Все это справедливо, например, для мягкой стали; таким образом, прочность стали связана с ее «неупругостью». Предельные упругости при деформациях объема и формы как бы противостоят одна другой. При разрыве стержня из мягкой стали с образованием «конуса» и «кратера» проявляются оба эти механизма, из которых первый превалирует над вторым вблизи оси стержня, где изотропная компонента напряжений имеет максимальное значение.

Следует отметить, что при простом растяжении стержня возникает изотропная компонента, которая может вызвать разрыв, если будет превзойден предел объемной упругости.

γ) Из уравнения (16.2) для тела Максвелла получим следующее соотношение:

$$\dot{w}_{(0)} = s\dot{d} = \frac{\dot{s}s}{2\mu} + \frac{s^2}{2\eta}. \quad (37.5)$$

Критерий разрушения поэтому записывается в виде

$$\int \left(\dot{w}_{(0)} - \frac{s^2}{2\eta} \right) dt = \frac{1}{2\mu} \int_0^{s_f} s\dot{s} dt = \frac{s_f^2}{4\mu} = E_{(0)}, \quad (37.6)$$

где s_f — напряжение, при котором происходит разрушение. Из условия (37.6) получим:

$$s_f = 2\sqrt{E_0\mu}, \quad (37.7)$$

а уравнение (16.2) приводит к соотношению

$$\dot{d}_{sf} = \frac{\dot{s}}{2\mu} + \sqrt{\frac{E_0\mu}{\eta^2}} = \frac{\dot{s}}{2\mu} + \varepsilon_{sf}, \quad (37.8)$$

где \dot{d}_{sf} — скорость деформации, при которой материал разрушается при постоянной статической нагрузке.

Таким образом, тело Максвелла разрушается, если напряжение достигает некоторого предела s_f , определяемого критерием (37.7), в то время как скорость деформации \dot{d}_f , при которой материал разрушается, увеличивается со скоростью роста напряжений. Это положение было подтверждено для некоторых пластиков (см. Рейнер и Фрейденталь¹⁾).

¹⁾ Reiner M., Freudenthal A., Proc. 5th Internat. Congr. Appl. Mech. Cambridge, Massachusetts, 1938.

С. МИКРОРЕОЛОГИЯ¹⁾

38. Общие положения. Большая часть материалов, с которыми реология имеет дело, являются *дисперсными системами*, состоящими из двух или более различных компонент или *фаз*, из которых одна (считая, что любой материал имеет пустоты или поры) обычно является воздухом. Даже поликристаллический металл имеет тонкие аморфные прослойки между кристаллитами, которые могут рассматриваться как отдельная фаза. В макрореологии такие материалы считаются однородными. Задачей микрореологии является установление взаимосвязи между реологическими свойствами сложной системы и ее составных частей. Если эта цель достигнута, то можно определять структуру неоднородного материала с помощью реологических измерений. Этот метод называется реологическим анализом.

Одна из фаз является *сплошной*, а поэтому называется *средой*. Иногда считают, что дисперсная фаза состоит из отдельных частиц. Фаза может быть твердой, жидкой или газообразной. Дисперсные системы являются комбинациями такого рода фаз. Дисперсия твердого вещества в жидкости называется *золем*, жидкости в твердом теле — *гелем*. Часто при повышении концентрации твердой фазы наблюдается непрерывный переход золя в гель. Если твердая фаза является непрерывной в пределах всего объема тела, то по американской терминологии такая система называется *студнем* (jelly).

Эта терминология заимствована из коллоидной химии, где она еще более запутана. Реология использует упрощенные представления.

¹⁾ В подготовке к печати §§ 38—42 принимал участие Хашин (Z. Hashin).

В качестве примера мы можем рассмотреть битум, упомянутый нами в §§ 17 и 18. Пфейфер и Сал¹⁾ указывали, что с реологической точки зрения следует различать два рода битумов. Битумы являются дисперсиями мицелл²⁾ в тяжелом вязком масле. Мицеллы состоят из

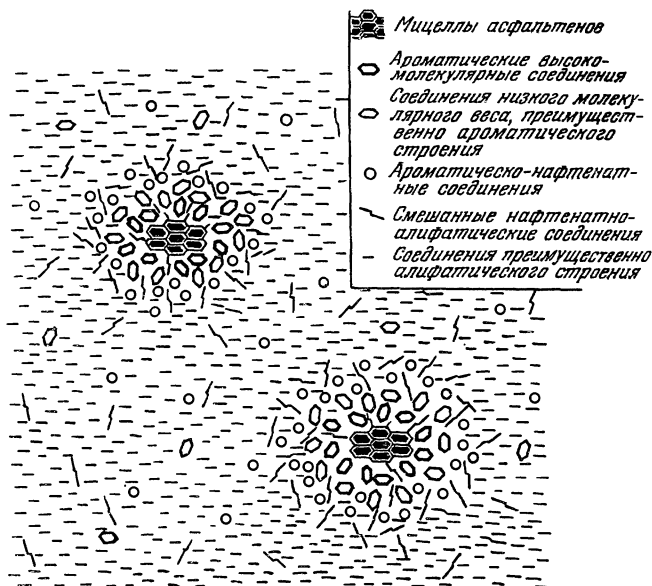


Рис. 36. Битум — золь.

агрегатов высокомолекулярных углеводородов, сорбирующих масло своей поверхностью и внутренними слоями. Если мицеллы пептизированы и могут свободно, насколько позволяет вязкость среды, перемещаться в масле, то система является золем и обнаруживает вязкое течение и внутримицеллярную упругость (рис. 36). Если же между мицеллами действуют силы притяжения, то мицеллы образуют неправильную структурную сетку геля, полости которой заполнены вязкой жидкостью (рис. 37).

1) Pfeiffer T. Ph., Saal R. N., J. Phys. Chem. 44, 139 (1940).

2) Мицелла (от лат. micella — новообразование) — частица дисперсной фазы в коллоидной системе. (Прим. ред.)

Межмицеллярные силы могут релаксировать, и структура, таким образом, будет вести себя как тело Максвелла. Благодаря наличию вязкого масла между мицеллами упругая деформация при нагрузке не развивается мгновенно, т. е. со скоростью звука, а происходит с запаздыванием, как у тела Кельвина, обладающего вязкостью последействия. В этом случае различные фазы не могут

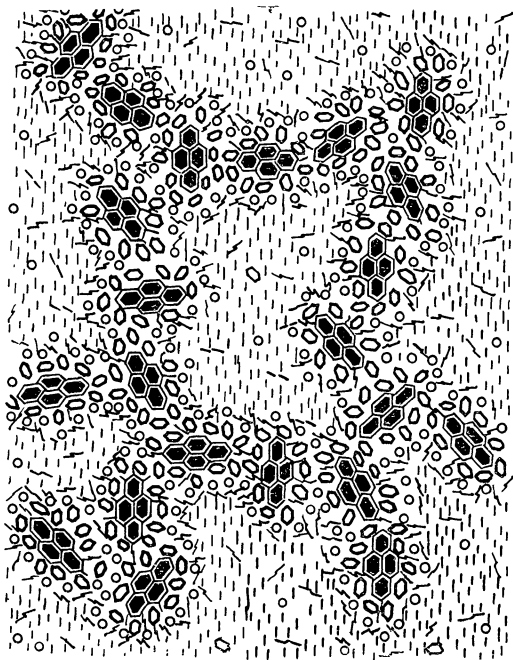


Рис. 37. Битум — гель.

наблюдаться невооруженным глазом. В качестве примера дисперсной системы назовем глину, строение которой изображено на рис. 8, а также бетон. Твердый скелет в бетоне образован грубыми агрегатами, промежутки заполнены раствором. Сам раствор представляет собой дисперсию песка в цементе, причем последний по отношению к наполнителю может рассматриваться как очень вязкая жидкость. Бетон же в целом можно считать гелем.

В очень хорошем бетоне раствор заполняет все промежутки в скелете из грубых агрегатов, в связи с чем образуется единая твердая структура по всему объему бетона. При этом с точки зрения реологии бетон может рассматриваться как студень.

Кроме дисперсий твердого тела в жидкости мы можем встретиться с дисперсиями твердого тела в твердом теле и жидкости в жидкости. Последние называются *эмульсиями*.

Из рассмотрения схем строения дисперсных систем, представленных на рис. 8, 36 и 37, ясно, что математическое решение основных задач микрореологии связано с большими трудностями.

Чтобы применение математического анализа к рассматриваемым задачам было возможно, необходимо выполнение следующих условий:

(а) должны быть известны реологические уравнения составляющих материалов;

(b) частицы дисперсной фазы должны иметь математически описываемую форму границ;

(с) должны быть известны и математически описаны условия на границе раздела фаз;

(d) должны существовать и быть известными уравнения для работы и мощности напряжений составляющих систему материалов.

Как реологические тела дисперсные системы могут считаться квазиоднородными, т. е. статистически однородными. Это условие связано с предположением, что даже при ничтожных концентрациях число частиц достаточно велико, причем их размеры и распределения в среде постоянны.

Если частицы вытянуты или вообще несимметричны, дисперсная система является тем не менее квазиизотропной, если оси частиц статистически распределены по всем направлениям в пространстве. Можно считать, что это состояние существует у покоящейся жидкости или у пластического материала в исходном состоянии. Однако такой материал может стать анизотропным в процессе течения.

Объемная концентрация частиц, которая является параметром материала, определяется уравнением

$$c_v = \frac{\text{объем частиц в элементе дисперсной системы}}{\text{объем элемента}}. \quad (38.1)$$

Пусть реологическая константа дисперсионной среды равна M_m , материала дисперсной фазы M_p , а M^* определяет соответствующую реологическую константу дисперсной системы. При этом

$$\frac{M^*}{M_m} = M_{\text{rel}} \quad (38.2)$$

определяет относительную реологическую константу.

Задача заключается в определении M_{rel} из известных значений M_m , M_p , c_v и геометрии системы.

39. Разбавленные золи. Первая работа в этой области была выполнена Эйнштейном¹⁾ как часть докторской диссертации, где им из уравнений гидродинамики был вычислен коэффициент сдвиговой вязкости для весьма разбавленных растворов.

Метод Эйнштейна можно применить для определения реологических констант суспензий низкой концентрации при условии, что имеется решение соответствующей краевой задачи. Кратко опишем основы общего метода.

Реологические константы определяются из опытов, при которых образцы подвергаются действию какого-нибудь простого поля напряжений — деформаций. Состояние тела при этом можно назвать простым состоянием (например, простое растяжение для определения модуля упругости Юнга E , чистый изгиб для определения коэффициента вязкости Трутона λ_T , чистое кручение для измерений модуля сдвига μ или сдвиговой вязкости η и т. д.).

Пусть однородный изотропный материал испытывает действие такого простого напряженного состояния, обуславливающего однородное поле главных деформаций $\dot{d}_i^{(0)}$ и (или) однородное поле главных скоростей деформации $\dot{d}_i^{(0)}$. Пусть этот материал является средой, добавлением к которой частиц другого материала получим дисперсию низкой объемной концентрации. Дисперсная система подвергается действию такого же простого поля напряжений, вызывающих при этом деформации \dot{d}_i^* или скорости деформации \dot{d}_i^* .

Для разбавленных дисперсий низкой объемной концентрации можно сделать следующие допущения:

¹⁾ Einstein A. (1906), (1911).

(а) Между двумя частицами существует область (пусть незначительная), в пределах которой можно с достаточной точностью считать, что поля $d_i^{(0)}$ и (или) $\dot{d}_i^{(0)}$ не искажены частицами (рис. 38).

(б) В любой точке дисперсной системы влияние всех частиц можно определить путем суммирования влияний всех индивидуальных частиц, тогда как при определении влияния отдельной частицы присутствие всех других не учитывается.

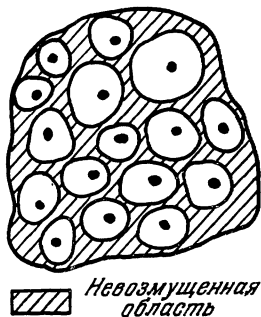


Рис. 38. Разбавленная дисперсия.

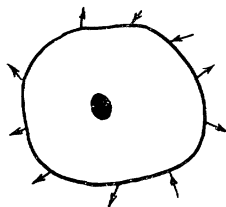


Рис. 39. Элемент, содержащий одну частицу.

(с) Направления главных осей величин $d_{(i)}^*$, $\dot{d}_{(i)}^*$ совпадают с соответствующими направлениями $d_i^{(0)}$; $\dot{d}_i^{(0)}$.

(д) Квадратами и более высокими степенями объемной концентрации можно пренебрегать.

Можно считать также, что взаимодействие между частицами ничтожно.

При попытке определить напряжения, деформации и скорости деформации вокруг частицы мы сталкиваемся со следующей краевой задачей: нам нужно решить дифференциальные уравнения для среды и частицы таким образом, чтобы на поверхности частицы удовлетворялись некоторые граничные условия (такие, как непрерывность вектора напряжения, отсутствие относительных перемещений и их скоростей и т. д.), причем в бесконечном удалении от частицы сохраняются однородные поля $\dot{d}_i^{(0)}$ и $\dot{d}_i^{(0)}$.

Рассмотрим для простоты случай, когда среда и частицы в ней являются твердыми телами и не обнаруживают временных эффектов.

Представим себе, что из дисперсной системы вырезан элемент, содержащий одну частицу. Пусть поверхность выреза лежит целиком в невозмущенной области (рис. 39), и пусть она будет подобна границе частицы. Такой элемент может быть назван составным элементом. Решив соответствующую краевую задачу, мы можем вычислить энергию упругой деформации $W(r_s, r_p, M, d_i^{(0)})$ этого сложного элемента, где r_s является параметром поверхности сложного элемента, r_p — параметр поверхности частицы, M — материальная константа среды или частицы.

Если частица отсутствует и ее место занято дисперсионной средой, то мы можем легко вычислить энергию деформации, предполагая поле напряжений однородным. Эту энергию деформации обозначим $W_0(r_s, M, d_i^{(0)})$.

Изменение упругой энергии, вызванное присутствием частицы, равно

$$\Delta W = W - W_0. \quad (39.1)$$

Теперь вырежем из дисперсной системы большую область по сравнению с составным элементом. Если частица отсутствует, то ее энергия деформации $W_0(R, M, d_i^{(0)})$ может быть подсчитана из начального состояния. Пусть величина R является параметром поверхности этой области.

Рассматривая ту же самую область у дисперсной системы, мы можем подсчитать энергию деформации с помощью равенства

$$W = W_0 + \sum_1^n \Delta W, \quad (39.2)$$

где n — число частиц в этой области.

Пусть теперь та же самая область состоит из другого однородного материала с материальной константой M^* и энергия деформации ее равна $W^*(R, M^*, d_i^*)$. Последняя должна равняться W ; отсюда имеем:

$$W^*(R, M^*, d_i^*) = W_0(R, M, d_i^{(0)}) + \sum_1^n \Delta W(r_s, r_p, R, M, d_i^{(0)}). \quad (39.3)$$

Остается выразить d_i^* как функцию известных величин. Для этой цели мы используем решение соответст-

вующей краевой задачи. Выберем произвольную точку в объеме, занятом дисперсной системой, и определим возмущение однородного напряженного состояния, вызванное какой-либо частицей, как функцию расстояния от этой точки. Если обозначим соответствующее возмущение для k -й частицы через $u'_{i(k)}$, то получим:

$$u_i^* = u_i^{(0)} + \sum_1^k u'_{i(k)}, \quad (39.4)$$

где $u_i^{(0)}$ — перемещение в отсутствие частицы и u_i^* — при наличии ее.

Величина d_*^i может быть вычислена путем дифференцирования, и в общем случае она равна

$$d_i^* = d_i^*(d_i^{(0)}, c_v, r_p). \quad (39.5)$$

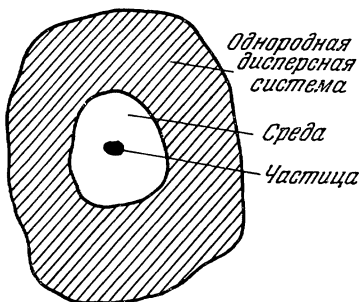


Рис. 40. Составной элемент.

Подставляя это выражение в уравнение (39.3), решаем его относительно единственной неизвестной M^* .

Метод может быть без изменения применен и к жидкостям. При этом достаточно заменить перемещения скоростями, деформации — скоростями деформации, энергию — мощностью. Для материалов, обнаруживающих временные эффекты, и для дисперсных систем из жидкостей и твердых тел мы должны приравнивать как энергии, так и мощности отдельно.

Другой, не менее общий метод был развит Фрелихом и Заком¹⁾. В этом методе приравнивались перемещения или скорости, но не энергии.

Предполагается, что составной элемент окружен здесь толстой оболочкой дисперсной системы (рис. 40), материальная константа которой является искомой величиной. К границам приложено однородное напряжение. При этом нужно решить дифференциальные уравнения для материалов, удовлетворяющие условиям на общей границе. Теперь вычислим перемещения на общей границе.

¹⁾ Froelich H., Sack R., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 185, 415—430 (1946).

Сначала предположим, что вся область состоит из дисперсной системы, константы которой неизвестны, и снова вычислим перемещения на границе. Приравнявая найденные ранее перемещения, мы получим выражение для материальных констант дисперсии.

40. Дисперсии в жидкостях. При выводе своего уравнения Эйнштейн исходил из следующих допущений:

(а) Растворитель, т. е. среда, представляет собой вязкую жидкость с известным коэффициентом сдвиговой вязкости η . Движение этой жидкости является настолько медленным, что линеаризованные уравнения Навье — Стокса описывают процесс с достаточной точностью.

(б) Молекулы растворенного вещества (частицы) рассматриваются как небольшие жесткие сферы.

(с) На поверхности частиц не происходит пристенного скольжения.

Для решения соответствующей краевой задачи необходимо вычислить возмущение, вызываемое жесткой сферой, в области течения, описываемого уравнением

$$u_i^{(0)} = \dot{d}_i^{(0)} x_i.$$

Задача решена путем обобщения метода Стокса для случая течения вязкой жидкости с постоянной скоростью около жесткой сферы. Результат записывается в следующем виде:

$$\eta_{\text{rel}} = \frac{\eta^*}{\eta_m} = 1 + 2,5c_v. \quad (40.1)$$

Результаты работы Эйнштейна были прежде всего обобщены для частиц различной формы.

Задачи о дисперсиях жестких эллипсоидов и жестких стержней при использовании различного рода предположений, касающихся ориентации их осей, были рассмотрены Джеффри, Эйзеншитцем и Бюргерсом¹⁾. Бюргерс развил специальный метод для вычисления вязкостей дисперсий твердых частиц, используя метод Осеена²⁾ для вязкого

¹⁾ Jeffery G. B., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **102**, 161—180 (1923); Eizenschitz R., Z. phys. Chem. A **163**, 133—141 (1933); Burgers J. M., Second report on viscosity and plasticity, Amsterdam, Nordemann Publishing, 1938.

²⁾ Oseen C. W., Hydrodynamik, Leipzig, Akad. Verlagsgesell., 1927.

течении вместо линеаризированных уравнений Навье — Стокса. Краткое изложение работ Джеффери, Эйзеншитца и Бюргерса можно найти в сборнике под редакцией Херманса (1953)¹⁾, где освещен также вопрос о влиянии броунового движения.

Симха²⁾ с целью определения эффектов взаимодействия вычислил вязкость дисперсии дублетов твердых сфер (типа гантелей), применив при этом теорию вязкого течения около двух сферических включений, развитую Смолуховским³⁾.

Другая работа посвящена дисперсии различных материалов, частицы которых имеют сферическую форму.

Рассматривая случай, когда среда является вязкой жидкостью, Гут и Марк⁴⁾ вычислили вязкость дисперсии пузырьков газа в ней и, пренебрегая поверхностным натяжением, получили формулу

$$\eta_{\text{rel}} = 1 - c_v. \quad (40.2)$$

Случай эмульсии сферических капель одной вязкой жидкости в другой рассмотрен Тэйлором⁵⁾, принимавшим во внимание поверхностное натяжение. Им была получена зависимость

$$\eta_{\text{rel}} = 1 + 2,5 \frac{2\eta_m + 5\eta_p}{5\eta_m + 5\eta_p} c_v, \quad (40.3)$$

где η_m — коэффициент сдвиговой вязкости жидкой среды, η_p — вязкость капель.

Дальнейшее обобщение этого случая, при котором принималось во внимание скольжение между каплями дисперсной фазы и дисперсионной средой при известном коэффициенте трения между ними, было выполнено Олдройдом⁶⁾, использовавшим метод Фрелиха и Зака.

¹⁾ Hermans, Flow properties of dispersed system, Amsterdam, North Holland Publishing, 1953.

²⁾ Simha R., J. Res. Nat. Bur. Stand. 42, 409—418 (1949).

³⁾ Smoluchowski M., Bull. Acad. Sci. Cracovie A 1, 28 (1911).

⁴⁾ Guth E., Mark H., Ergebn. exakt. Naturw. 12, 115—162 (1933).

⁵⁾ Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 138, 41—48 (1932).

⁶⁾ Oldroyd J. G., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 218, 122 (1953).

Случай дисперсии упругих сфер в вязкой жидкости был рассмотрен Фрëлихом и Заком их методом, описанным выше. Среда является ньютоновой жидкостью, подчиняющейся соотношению

$$\tau = \eta_m \dot{\gamma}, \quad (40.4)$$

где τ — касательное напряжение и γ — деформация сдвига.

Дисперсная система представляет собой вязко-упругое тело, уравнение которого имеет вид

$$\left(1 + T_1 \frac{d}{dt}\right) \tau = \eta^* \left(1 + T_2 \frac{d}{dt}\right) \dot{\gamma}, \quad (40.5)$$

где время релаксации T_1 и упругого последействия T_2 определяется формулами

$$T_1 = \frac{3\eta_m}{2\mu_p} \left(1 + \frac{5}{3} c_v\right), \quad (40.6)$$

$$T_2 = \frac{3\eta_m}{2\mu_p} \left(1 - \frac{5}{2} c_v\right), \quad (40.7)$$

причем μ_p — модуль сдвига частиц.

41. Дисперсии в твердых телах. Случай твердой дисперсионной среды рассмотрен Мекензи¹⁾. Им были определены объемный модуль κ и модуль сдвига μ дисперсии сферических полостей в упругой сплошной среде. Для этой цели он использовал метод Фрëлиха и Зака. Так как при этом нужно было определить две различные независимые константы, рассматривались два однородных состояния, одно при гидростатическом давлении и второе при однородном сдвиге. Более сложной краевой задачей была задача о сдвиге; решение ее получено в рядах сферических гармонических функций [ср. Love (1927), стр. 250]²⁾.

Мы выписали здесь результаты Мекензи с целью сравнения их с соответствующими уравнениями для относительной вязкости. Пренебрегая членами высших

¹⁾ Mackenzie J. K., Proc. Phys. Soc. Lond., B 63, 361 B, 2—11 (1950).

²⁾ Русский перевод: Ляв, Математическая теория упругости, 1935, стр. 262. (Прим. ред.)

порядков малости, получим:

$$\kappa_{\text{rel}} = 1 - \frac{3}{2} \frac{1 - \nu_m}{1 - 2\nu_m} c_v, \quad (41.1)$$

$$\mu_{\text{rel}} = 1 - 15 \frac{1 - \nu_m}{7 - 5\nu_m} c_v, \quad (41.2)$$

где ν_m — коэффициент Пуассона для дисперсионной среды.

В той же самой статье рассмотрен случай, когда полости находятся под давлением.

Случай дисперсии жестких сфер в упругой среде рассмотрен Хашином¹⁾, который применял метод Эйнштейна. Точное решение задачи о возмущениях, вызванных жесткой сферой в бесконечной упругой среде, в случае однородного деформированного состояния было получено простым методом Кельвином²⁾. При этом уравнения упругости решаются внутри или вне сферической поверхности при условии, что перемещения на границе имеют заданные значения. Изложение этого метода приведено в книге L o v e (1927), гл. XI.

Решение, полученное в виде ряда сферических гармонических функций отрицательных целых степеней, было выполнено для случая гидростатического давления и простого сдвига. Было найдено, что

$$\kappa_{\text{rel}} = 1 + 3 \frac{1 - \nu_m}{1 + \nu_m} c_v, \quad (41.3)$$

$$\mu_{\text{rel}} = 1 + \frac{15}{2} \frac{1 - \nu_m}{4 - 5\nu_m} c_v, \quad (41.4)$$

где E — модуль Юнга.

Следует отметить, что в работах Мекензи и Хашина не делалось предположений о том, что включения имеют одинаковые размеры.

Мы можем проверить формулы (41.2) и (41.4), если примем во внимание аналогию между медленным течением вязкой жидкости и деформациями несжимаемой среды. При этом скорость вязкой жидкости аналогична упругому перемещению, скорость деформации — упругой деформации и коэффициент сдвиговой вязкости —

¹⁾ Hashin Z., Bull. Res. Council Israel 5 c, 46 (1955).

²⁾ Thomson W., Tait P. G., Natural Philosophy, Pt. II, Cambridge, Univ. Press, 1879—1883.

модулю сдвига. Подставляя $v_m = 1/2$ в формулу (41.2), получим $\mu_{rel} = 1 - c_v$, т. е. результат, аналогичный формуле Гута и Марка (40.2)¹⁾. Вводя $v_m = \frac{1}{2}$ в (41.4), придем к формуле $\mu_{rel} = 1 + 2,5 c_v$, аналогичной соотношению Эйнштейна (40.1).

Был рассмотрен также случай дисперсии сферических частиц одного упругого материала в другом. Хашин получил при этом зависимости:

$$\kappa_{rel} = 1 - 3(1 - v_m) \frac{1 - \kappa_p/\kappa_m}{2(1 - 2v_m) + (1 + v_m)\kappa_p/\kappa_m} c_v, \quad (41.5)$$

$$\mu_{rel} = 1 - 15(1 - v_m) \frac{1 - \mu_p/\mu_m}{7 - 5v_m + 2(4 - 5v_m)\mu_p/\mu_m} c_v, \quad (41.6)$$

где индекс p относится к частицам. В случае полостей $\kappa_p = \mu_p = 0$ и мы получим формулы (41.1) и (41.2). В случае жестких сфер $\kappa_p \rightarrow \infty$, $\mu_p \rightarrow \infty$ и имеем соотношения (41.3) и (41.4).

Случай сферических включений, наполненных вязкой жидкостью, в упругом теле рассмотрен Олдройдом²⁾.

Эта задача противоположна случаю, рассмотренному Фрëлихом и Заком, и ее решение выполнялось их же методами. Вместо соотношения

$$\tau = \mu_m \gamma, \quad (41.7)$$

где τ — касательное напряжение, для дисперсной системы получим зависимость

$$\left(1 + T_1 \frac{d}{dt}\right) \tau = \mu^* \left(1 + T_2 \frac{d}{dt}\right) \gamma. \quad (41.8)$$

Для несжимаемой среды была найдена формула

$$\mu^* = \mu_m \left(1 - \frac{5}{3} c_v\right). \quad (41.9)$$

Точные формулы для κ^* и μ^* даны в зависимости от реологических констант упругой среды и вязкой жидкости, которая заключена в полостях этой среды.

¹⁾ При этом получим (41.9), а не аналог (40.2). (Прим. ред.)

²⁾ Oldroyd J. G., в сб. Mill C. (редактор), Rheology of disperse systems. London, 1959, стр. 7. (Прим. ред.)

42. Дисперсные системы высокой объемной концентрации. *а) Общие положения.* Не следует думать, что линейные относительно c_v формулы, приведенные в § 41, будут удовлетворяться и для высоких объемных концентраций. Опыты показывают, что формула Эйнштейна при объемных концентрациях, превышающих 2—3%, несправедлива.

С практической точки зрения случаи высоких объемных концентраций имеют наибольшее значение. Так, например, объемная концентрация частиц песка в бетонном растворе достигает 60%, наполнителей в резинах — 50%.

Рассматривая дисперсии с высокими концентрациями, мы не можем более пренебрегать взаимодействием частиц, а также не можем считать отдельные эффекты для любой точки аддитивными. Более того, при интегрировании уравнений в теории дисперсий низкой концентрации обычно считалось, что объем, занимаемый частицами, ничтожен по сравнению со всем рассматриваемым объемом.

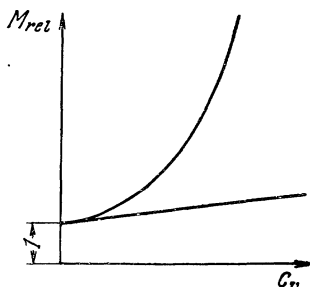


Рис. 41. Зависимость относительной константы от концентрации.

Следует ожидать, что зависимость M_{rel} от c_v представляет собой кривую (рис. 41), касательная к которой, проведенная через точку $c_v = 0$, является графиком соответствующего уравнения для малых концентраций. Функция $M_{rel}(c_v)$ изображается кривой, обращенной выпуклостью в сторону оси абсцисс, если среда упрочняется частицами дисперсной фазы (как, например, в случае жестких сфер), и вогнутостью, если среда разупрочняется (например, в случае полостей).

Можно представить функцию M_{rel} в виде степенного ряда:

$$M_{rel} = 1 + \alpha_1 c_v + \alpha_2 c_v^2 + \alpha_3 c_v^3 + \dots, \quad (42.1)$$

причем при $c_v = 0$ $M_{rel} = 1$, а α_1 , совпадает с соответствующим коэффициентом уравнения в § 41, так что для малых c_v формула вырождается в соответствующую зависимость для малых концентраций.

Следуя Кримеру, мы можем записать:

$$\alpha_1 = M_i. \quad (42.2)$$

Назовем величину M_i *характеристической материальной константой*. Из рис. 41 или с помощью дифференцирования уравнения (42.1) имеем:

$$M_i = \left. \frac{dM_{\text{rel}}}{dc_v} \right|_{c_v=0}. \quad (42.3)$$

б) *Вязкость концентрированных дисперсий*. В работах по дисперсиям высоких концентраций были предприняты попытки определения относительной вязкости суспензии жестких сфер в вязкой жидкости и обобщения формулы Эйнштейна.

Определялись эффекты взаимодействия между частицами при их сближении. Вычисления при этом были очень сложными, а результаты плохо согласовались между собой.

Не вызывает возражения, что параметр $\alpha_1 = \eta_i = 2,5$. Однако при вычислениях α_2 получены, наряду с другими результатами, значения $\alpha_2 = 14,1^1)$ и $\alpha_2 = 7,349^2)$.

Возникает вопрос, возможно ли вообще получить формулу, учитывающую взаимодействие частиц и пригодную для любых значений c_v , начиная с $c_v = 0$?

Нижний предел удовлетворяет равенству (42.3) и соответствующему уравнению § 41. Здесь возникает вопрос: какова же величина верхнего предела? Совершенно ясно, что после того, как сферы будут при плотной упаковке касаться друг друга, дальнейшее увеличение концентрации исключается. Течение при этом становится невозможным и вязкость стремится к бесконечности. Однако существуют различные типы упаковки сфер. Для шариков одинаковых размеров при кубической упаковке $c_v = \pi/6 = 0,52$, тогда как при гексагональной упаковке, которая является наиболее плотной, $c_v = 0,74$. Формулу, которая удовлетворяла бы опытным данным, условиям $c_v = 0$, $\eta_{\text{rel}} = 1$ и предсказывала бы характер предельной упаковки, получить, по-видимому, очень трудно.

1) Guth E., Simha R., Kolloid-Z. 74, 266 (1936).

2) Vand V., J. Phys. Colloid Chem. 52, 277—299 (1948).

Если это препятствие удастся преодолеть, то мы столкнемся с другой серьезной трудностью, связанной с предположением о сферической форме частиц. Эта гипотеза не служит серьезным препятствием при построении теории дисперсий низкой концентрации, так как частицы находятся на значительных расстояниях друг от друга и при подсчете энергий составных элементов можно принять, что условия на некотором удалении от частицы мало зависят от того, имеет ли она идеальную сферическую форму или нет. Наоборот, если частицы находятся на слишком близком расстоянии, то любое отклонение от идеальной сферической формы может оказать большое влияние.

Более рациональный подход заключается в *априорном* требовании того, чтобы вязкость η_{rel} удовлетворяла условию $d\eta_{\text{rel}}/dc_v = 2,5$ при $c_v \rightarrow 0$ и бесконечно росла по мере приближения c_v к предельной концентрации, соответствующей какому-либо типу плотной упаковки частиц. Эта задача была очень изящно решена Муни¹⁾, который получил уравнение для η_{rel} из простого предположения о том, что порядок добавления отдельных порций дисперсной фазы к жидкости не оказывает влияния на вязкость для заданного c_v . Его формула имеет вид

$$\eta_{\text{rel}} = \exp \left(\frac{2,5c_v}{1 - kc_v} \right), \quad (42.4)$$

причем считается, что эффекты взаимодействия и способ заполнения частицами пространства учитываются одной константой k , названной *коэффициентом samozаполнения*.

Нетрудно видеть, что первое из ранее названных условий удовлетворяется. Чтобы удовлетворить второму, необходимо обрести, чтобы знаменатель $1 - kc_v$ показателя степени обращался в нуль в точке, расположенной между пределами $c_v = \pi/6$ и $c_v = 0,74$, соответствующими самой рыхлой и самой плотной упаковке. Таким образом, найдено, что $1,35 < k < 1,91$.

При надлежащем подборе величины k получается хорошее совпадение с опытом. Теория обобщается и на частицы разных размеров.

¹⁾ Mooney M., J. Colloid Sci. 6, 162—170 (1951).

Другой подход в случае высоких концентраций был развит Симха¹⁾. Он считал, что при высоких концентрациях существенны только силы взаимодействия частицы со своими ближайшими соседями. Можно представить себе, что вокруг каждой частицы изотропной дисперсной системы находится некоторая гипотетическая сферическая поверхность, причем частица в центре сферы не взаимодействует с другими, расположенными вне ее. Затем была сформулирована и решена соответствующая гидродинамическая краевая задача. Окончательное решение записывается в виде

$$\eta_{\text{rel}} = 1 + 2,5\lambda c_v, \quad (42.5)$$

где λ — функция только отношения a/b , a — радиус частицы и b — радиус сферы молекулярного действия.

Фактор λ изменяется от единицы для малых c_v до бесконечности при плотной упаковке частиц. Он может рассматриваться как полуэмпирическая функция²⁾.

Мы описали здесь только теоретические работы по определению материальных констант дисперсных систем. Здесь следует отметить также некоторые интересные экспериментальные данные для бетона, полученные Арнштейном и Рейнером³⁾. Исследуя ползучесть цементного раствора, вязкость которого составляла приблизительно 10^{17} пуазов, эти авторы подтвердили пригодность уравнения Эйнштейна (40.1) для объемных концентраций песка до 60%.

Полученная ими экспериментальная формула имеет вид

$$\eta_{\text{rel}} = \frac{\eta_{\text{раствора}}}{\eta_{\text{цемента}}} = \frac{1 + WC}{1 + \overline{WC}} (1 + 2,5c_v), \quad (42.6)$$

где WC — объемное водоцементное отношение для чистого цемента и \overline{WC} — объемное водоцементное отношение

1) Simha R., J. Appl. Phys. 23, 1020—1024 (1952).

2) См. также главу, написанную Frisch and Simha, в сборнике под редакцией Eirich.

3) Arnstein A., Reiner M., Civ. Engng., Lond. 40, 198—202 (1945).

ние цементной основы, образующей рассматриваемый раствор.

Этот результат может быть обусловлен высоким коэффициентом вязкости цементной основы, при котором установившаяся ползучесть (крип) раствора не наступала даже спустя весьма длительный промежуток времени, измеряемый годами. Поэтому опыт, который занял четыре года, можно рассматривать, как относящийся лишь к периоду неуставившейся ползучести.

43. Реологическое исследование структурной вязкости. При рассмотрении обобщенных ньютоновых жидкостей, обнаруживающих физическую нелинейность η или ϕ (см. § 26), обращает на себя внимание тот факт, что все они (насколько нам известно) являются дисперсными системами и η уменьшается (или увеличивается) с ростом скорости сдвига. Взвешенные частицы *взаимодействуют* с движущейся дисперсионной средой. Если мы покажем, что этот эффект уменьшается с ростом скорости сдвига, то получим таким образом объяснение нелинейного поведения. Задача поэтому заключается в том, чтобы объяснить, почему и каким образом возрастание скорости сдвига должно снижать взаимодействие.

Следует различать два вида такого взаимодействия, которые названы нами: (1) возмущением и (2) иммобилизацией¹⁾.

а) *Возмущение* есть механизм, описанный в предыдущих разделах. Он может привести к нелинейному поведению четырьмя различными путями.

а1) *Ориентация потоком частиц дисперсной фазы и дезориентация их броуновым движением.* Как показано в § 3, простой сдвиг, а следовательно, и течение сопровождаются вращением. Если взвешенные частицы не являются сферами, а имеют удлиненную форму, например эллипсоидальную, то силы взаимодействия частиц с потоком зависят от их ориентации в потоке жидкости, т. е. от угла ϕ между главной осью эллипсоида и направлением течения. В покоящейся жидкости этот угол может иметь любое значение с одинаковой степенью вероятности. Такое распределение частиц по направлениям определяет вязкость η_0 .

¹⁾ См. таблицу 8.

При течении жидкости этот угол постоянно меняется вследствие вращения частиц ¹⁾). При низких температурах интенсивность броунова движения незначительна и ориентация частицы всецело обусловлена потоком жидкости. Такое течение определяет вязкость η_{∞} . При случайной ориентации частицы перпендикулярно направлению потока последняя при ламинарном течении взаимодействует с большим объемом жидкости, чем в том случае, когда ориентация совпадает со скоростью течения. Поэтому $\eta_0 > \eta_{\infty}$.

Ориентации препятствует вращательная диффузия, вызванная броуновым движением. Если броуново движение ничтожно, то вязкость η_{∞} проявляется с момента стабилизации, течения, и такая система является *простой линейной* с вязкостью η_{∞} . Когда влияние броунова движения превалирует над силами ориентации, η_0 сохраняется, и течение в этом случае есть также простое линейное. В общем случае при любой температуре и любой скорости сдвига будет устанавливаться динамическое равновесие между силами диффузии и ориентации, причем вязкость η удовлетворяет неравенству $\eta_0 > \eta > \eta_{\infty}$.

При этом *относительная вязкость η_{rel}* ²⁾) *должна зависеть от температуры*. При повышении температуры не только меняется вязкость дисперсионной среды, но повышается также интенсивность броунова движения и величина η приближается к η_0 . Таким образом, с ростом температуры η_{rel} увеличивается.

α_2) Упругая деформация. В результате взаимодействия жидкости с частицей в последней возникают напряжения. Под действием напряжений частица подобно пружине деформируется, причем деформация может быть значительной. Натяжение и удлинение частицы максимальны, когда ее ось наклонена под углом 45° к направлению

¹⁾ Если частица представляет собой сферу, то все оси частицы геометрически эквивалентны и вращение ее не оказывает влияния на поток. Это положение не объясняет, однако, почему суспензия жестких сфер в ньютоновой жидкости, рассмотренная Эйнштейном (см. § 40), не является простой ньютоновой жидкостью, как этого требует описываемый эффект.

²⁾ Определяемая уравнением (40.1).

течения. Частица, однако, не только деформируется в потоке, но и вращается. При повороте пружина освобождается от нагрузки и упруго восстанавливает свою форму. При этом в частице должны возникать передающиеся жидкости колебания, в результате которых возрастает количество рассеиваемой энергии. Если такой механизм существует, то при повышении скорости сдвига должна *возрастать* относительная вязкость.

α3) Выпрямление свернутых нитей. Если частицы имеют форму длинных нитей, которые не обладают жесткостью, то результат будет совершенно отличным от описанного в разделе *α2)*. Натяжение вызывает выпрямление нитей. Это уменьшает взаимодействие частиц с потоком жидкости, и поэтому вязкость понижается. Вращение же частицы вызывает ее обратное закручивание. Такой механизм может быть независимым от температуры.

α4) Разрыв. Если натяжение очень велико или прочность частиц очень мала, то последние могут разрываться, как только их ось совпадает с направлением максимального натяжения ($\varphi = 45^\circ$). Частица может быть также разрушена от изгиба. При разрыве уменьшается отношение наибольшего размера к наименьшему, форма частиц при этом приближается к шарообразной, и η уменьшается. Если *в подходящем положении* осколки коснутся друг друга, то частица может восстановить свою первоначальную форму. Вероятность этого, однако, мала. Поэтому кривая консистенности, полученная при убывающей скорости сдвига, будет отличаться от кривой, снятой при нарастающей скорости, т. е. кривая консистенности будет иметь петлю гистерезиса.

β) Иммобилизация может вызвать нелинейное поведение по двум причинам.

β1) Адсорбция. Адсорбционный слой может быть сдвинут при течении жидкости. Такой механизм был предложен Гатчеком ¹⁾ и математически сформулирован Рейнером и Ривлином ²⁾. В этом случае изменение температуры должно оказывать влияние. Адсорбция есть

¹⁾ Hatschek E., Jane R., Kolloid-Z. 40, 53 (1926).

²⁾ Reiner M., Rivlin R., Kolloid-Z. 43, 72 (1927); 44, 9 (1928).

экзотермический процесс и, следовательно, понижается с ростом температуры.

β2) *Пространственная иммобилизация* подробно обсуждалась Кремером и Вильямсоном¹⁾. Они представляли частицы дисперсной фазы «ультрамикроскопическими телами, которые, подобно гелям, пропитаны жидкой средой. Единство структурных элементов, образующих частицу, поддерживается одним или несколькими типами связей, действующими между атомами и молекулами». Частицы могут представлять собой: (i) гигантские молекулы, иммобилизующие растворитель между разветвлениями и в кольцах, (ii) мицеллы (кристаллиты), (iii) группу правильно расположенных мицелл, (iv) агрегат (беспорядочное соединение) малых частиц.

Нелинейное поведение обуславливается двумя причинами: (a) деформацией, (b) разрушением.

По поводу пункта (a) следует заметить, что частицы могут значительно деформироваться. Поэтому они будут частично принимать участие в деформации жидкости. При деформации частицы растворитель выжимается из нее, как из губки, и количество свободной жидкости, таким образом, увеличивается.

Относительно пункта (b) заметим, что деформация системы сопровождается напряжениями. Частицы могут сопротивляться этим напряжениям лишь до определенного предела. Если этот предел превзойден, то частица разрушается, освобождая часть иммобилизованной жидкости. Если осколки частицы в процессе течения приходят в соприкосновение друг с другом, то может произойти их воссоединение. «Для заданной скорости сдвига устанавливается динамическое равновесие между скоростью разрушения и скоростью агрегации».

Однако вероятность агрегации обычно не равна вероятности разрушения. Они могут быть равны только в случае (iv), когда частицы представляют собой неупорядоченные агрегаты. Только в этом случае каждое столкновение осколков при любой их ориентации всегда ведет к воссоединению. В случае молекул, мицелл и упорядоченных

¹⁾ Краемер E. O., Williamson R. V., J., *Rheology* 1, 76 (1929).

агрегатов соединение осколков может иметь место, если только осколки расположены некоторым определенным образом по отношению друг к другу. Не всякая ориентация осколков, следовательно, является одинаково благоприятной. Если кривая консистентности снимается дважды, один раз при возрастании скорости сдвига от нуля до максимума и затем при снижении до нуля, то в результате получается не единая кривая, а две кривые, образующие петлю гистерезиса.

Касаясь влияния температуры, мы можем предположить, что силы связей внутри беспорядочного агрегата бывают обычно настолько малы, что по мере повышения температуры агрегат постепенно самопроизвольно распадается.

γ) *Структурные критерии.* Все эти рассуждения приводят к заключению, что могут существовать и, по-видимому, действительно существуют различные механизмы аномалии вязкости. Рассмотренные случаи аномалий и их особенностей приведены в таблице 8. Существуют четыре критерия, определяющие тот или иной механизм. Это (I) влияние температуры на η_{rel} ; (II) обратимость или необратимость процесса при изменении скорости сдвига, другими словами, существование или отсутствие петли гистерезиса; (III) существование нижнего предела нелинейного поведения; (IV) соотношение между η_0 и η_∞ .

В отношении пункта I следует заметить, что η_{rel} не может зависеть от температуры, если только явление нелинейности имеет полностью геометрико-механическую природу. В этом случае изменение вязкости раствора с температурой всецело обусловлено изменением вязкости растворителя. Таким механизмом, в частности, является разрыв (в таблице строка 1, iv), поскольку в этом случае меняется только геометрическая форма частиц. В случае 1, iii влияние температуры, вероятно, также будет отсутствовать. С другой стороны, для случаев 1, i и 1, ii зависимость от температуры должна наблюдаться. По поводу всех других механизмов мы ничего не можем сказать *априори*.

В связи с пунктом II мы уже указывали, что мгновенное (т. е. без запаздывания) изменение вязкости с изменением скорости сдвига может произойти только в том

Таблица 8

Типы структурной вязкости

Характер взаимодействия при течении дисперсной фазы с дисперсионной средой	I	II	III		IV
	Температурная зависимость η_{Tcl}	Обратимость кривых консистенций	Существование нижнего предела		Зависимость η_0/η_∞ от c_v
1. Возмущение					
(i) Взаимодействие ориентации с броуновым движением	повышает	есть	нет		нет
(ii) Упругая деформация	повышает	есть	нет		нет
(iii) Выпрямление свернутых нитей	нет	есть	нет		нет
(iv) Разрыв	нет	нет	есть		нет
2. Иммобилизация					
(A) Адсорбция	понижает	есть	есть		нет
(B) Объемная иммобилизация			(a) деформация	(b) разрыв	
(i) Макромолекулы	?	нет	нет	есть	нет
(ii) Мицеллы	?	нет	нет	есть	нет
(iii) Упорядоченные группы	?	нет	нет	есть	нет
(iv) Неупорядоченные группы	понижает	есть	нет	есть	есть

случае, если любое относительное положение частиц в момент столкновения вызывает их укрупнение. Это условие не соблюдается, если частицы являются молекулами или мицеллами.

Относительно пункта III необходимо сделать следующие замечания. Если нелинейная вязкость обусловлена частичным разрушением структуры (2B, ii, iii, iv) или уменьшением размера частиц (1, iv; 2A), то должен существовать нижний, отличный от нуля предел нелинейной

вязкости. Силы, благодаря которым существуют первичные частицы или вторичные структуры, могут быть преодолены, только когда напряжения, создаваемые течением, достигнут и превысят некоторое значение. Вплоть до этого значения поведение жидкости является нормальным, т. е. простым линейным. Такого предела не может существовать в случаях (1, i, ii, iii), где малейшие напряжения должны оказывать влияние.

По поводу пункта IV следует заметить следующее. Если структура дисперсной фазы *не зависит от ее концентрации*, то η_0/η_∞ должно быть независимым от c_p . Например, если аномалия вязкости обусловлена механизмом 1, i, т. е. взаимодействием ориентации и броунова движения, отношение η_0/η_∞ должно иметь одно и то же значение, независимо от того, имеется ли в дисперсии всего одна вытянутая частица или их множество. С другой стороны, в случае 2B, iv, т. е. беспорядочных агрегатов, вторичные структуры будут, возможно, появляться только при высоких концентрациях, тогда как при низких концентрациях дисперсная фаза будет состоять из устойчивых первичных частиц. В этом случае отношение η_0/η_∞ будет возрастать с c_p .

Все механизмы требуют, чтобы поведение переходило в чисто линейное, когда достигается η_∞ . Это значение η_∞ может достигаться либо при конечной скорости сдвига, либо асимптотически при бесконечной скорости сдвига.

Температурная зависимость механизма структурной вязкости определяется из *кривых относительной консистентности*. Относительная консистентность определяется *относительной консистентной переменной*

$$V_{\text{rel}} = V\eta_s \quad (43.1)$$

и откладывается на графике как функция P ; η_s — вязкость среды (растворителя). Если температурная зависимость отсутствует, то все кривые сливаются в одну.

Д. РЕОМЕТРИЯ

44. Метод. Определение реологических параметров проводится с помощью различного рода *реометров*, к числу которых относятся *вискозиметры* для различного рода жидкостей и *испытательные машины* для металлов и других твердых материалов. При этом измеряется или абсолютная величина определяемой характеристики, или ее значение по отношению к какому-либо эталонному материалу. Реометры разделяются на три типа. В приборах I типа исследуемый материал подвергается чистой однородной деформации. В реометрах II типа он подвергается ламинарному полуюднородному сдвигу. Наконец, в приборах III типа происходит ламинарное течение более сложного вида.

Примерами испытаний I типа являются испытания на растяжение мягкой стали, испытания на сжатие бетона и вязкое растяжение по Трутону¹⁾. При этом должны приниматься во внимание «концевые эффекты». Этот метод малопригоден или вообще непригоден для исследования эффектов второго порядка.

Примерами приборов II типа являются капиллярный и ротационный вискозиметры. Вследствие неоднородности поля деформаций мы вынуждены здесь или *интегрировать* реологическое уравнение, или *дифференцировать* эмпирические результаты²⁾. В некоторых случаях при ламинарном сдвиге могут наблюдаться явления, ошибочно принимаемые за аномальные. Если, например, измерения проводятся с помощью ротационного вискозиметра, то эффекты, обусловленные вращением главных

¹⁾ Trouton F., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **77**, 326 (1906).

²⁾ Hersey M. D., J. Rheology **3**, 196 (1932); Reiner M., Scott Blair G. W., J. Appl. Phys. **21**, 1195 (1950); **22**, 236 (1951).

осей деформации, мы можем ошибочно принять за неньютоново течение. Однако по этим же причинам метод весьма удобен для исследования эффектов второго порядка.

Примером метода III типа является метод падающего шарика, движение которого подчиняется закону Стокса.

В приборах I и II типов метод испытаний является или статическим, т. е. в условиях равновесия, или динамическим, при котором нагрузки и деформации меняются заданным образом. Если измеренные величины наносятся на график, изображающий их взаимную зависимость, то мы получаем *техническую кривую испытания*. Последняя еще не дает непосредственного представления о реологических свойствах. Чтобы получить это представление, необходимо построить *реологическую кривую испытания*, которая строится в консистентных переменных. Сравнивая общую форму такого графика с кривыми, полученными на моделях в воображаемых экспериментах, можно подобрать подходящее для данного материала реологическое уравнение.

Можно показать на примере бетона, как применяется этот метод ¹⁾. Пусть при нагружении бетонной или железобетонной пластины максимальная деформация последней равняется δ . Некоторая часть деформации прогиба развивается мгновенно (δ_i). Если нагрузка снимается немедленно после ее приложения ²⁾, то часть деформации $\delta_{e,i}$ *исчезает* также мгновенно; последняя вызвана напряжениями, обусловленными мгновенной упругой деформацией. Другая часть δ_s не исчезает, так что можно записать:

$$\delta_i = \delta_{e,i} + \delta_s. \quad (44.1)$$

С другой стороны, если нагрузка будет действовать некоторый период времени T , то величина δ возрастет от δ_i до δ_T . Если мы теперь снимем нагрузку, то, кроме мгновенного возврата, величина которого равна $\delta_{e,i}$, как и прежде, мы обнаружим также постепенное уменьшение деформации, продолжительность которого изме-

¹⁾ Arnan A., Reiner M., Teinowitz M., Loading Test Reinf. Concr. Struct. Res. Counc. Israel, Jerusalem, 1950.

²⁾ Некоторое время все же проходит, пока берется отсчет, производится разгрузка и т. д.

ряется сутками и неделями, а максимальная величина которого равна δ_d . Этот процесс представляет собой *упругое последствие*. В то же время остаточная деформация возрастает до какой-то величины δ_v . Если мы удвоим время нагружения, то увидим, что δ_v возрастает приблизительно до $2\delta_v$ и δ_d до $n\delta_d$, где $1 < n < 2$. Если нагрузка будет действовать бесконечно долгое время, то δ_d не превзойдет некоторой максимальной величины $\delta_{e,d}$, называемой *запаздывающей упругой деформацией*. Если δ_v возрастает во времени и с увеличением нагрузки примерно в пропорциональном отношении, как, например, в жидкости, то в данном случае эта деформация является *вязкой* ¹⁾.

Таким образом, мы можем разложить полную деформацию на составляющие тремя способами.

Во-первых, следует различать обратимые прогибы $\delta_{e,i}$ и $\delta_{e,d}$ и необратимые δ_s и δ_v . Первые два называются *упругими* деформациями, а последние — *остаточными*. Во-вторых, следует отличать мгновенные прогибы $\delta_{e,i}$ и δ_s от прогибов $\delta_{e,d}$ и δ_v , зависящих от времени. Если деформации $\delta_{e,d}$ и δ_s нарастают с очень малой скоростью, то происходит так называемая *ползучесть*. Эти деформации могут быть разделены только после снятия нагрузки, причем $\delta_{e,d}$ называется деформацией первичной ползучести и возникает в результате упругого последствия; δ_v — деформация вторичной, или установившейся, ползучести, возникающая вследствие вязкого течения ²⁾.

Как отмечено ранее, δ_s не наблюдается при вторичном нагружении.

Пренебрегая δ_s , мы можем с помощью третьего способа связать $\delta_{e,i}$ и δ_v , отделив их от $\delta_{e,d}$.

1) Это явление, обнаруженное у бетонов, было названо пластической деформацией. Реологические свойства бетона, описанные здесь, типичны для всех материалов, *не являющихся пластическими*. Бетон, обладающий текучестью и называемый поэтому пластическим материалом, в действительности также не является пластическим. При испытаниях с высокой скоростью деформации он хрупко разрушается. Мягкая сталь, являющаяся пластическим материалом, может деформироваться при ударе, бетон же не деформируется.

2) Автор, кроме того, первичную и вторичную ползучесть называет соответственно исчезающая (recoverable) и неисчезающая (irrecoverable) ползучесть. (Прим. ред.)

Нетрудно видеть, что при сложении $\delta_{e,i}$ и δ_v мы получим реологическое поведение материала, как у M -тела. С другой стороны, поведение $\delta_{e,d}$, как у K -тела. Если наблюдаются все эти виды деформации, то мы должны соединить M - и K -тела последовательно и получим таким образом $Ви$ -телло. Итак, мы пришли к выводу, что $Ви$ -телло пригодно для описания реологического поведения бетона ¹⁾, но при этом должна приниматься во внимание остаточная деформация δ_s .

45. Простое растяжение и сжатие. Испытания на растяжение и сжатие являются наиболее распространенными, так как их проще всего выполнить, несмотря на то что испытываемые материалы в условиях практики редко подвергаются простому растяжению или сжатию.

Испытания на растяжение широко применяются к черным и цветным металлам, а также к пластикам. Материалы, имеющие низкое сопротивление растяжению по сравнению с сопротивлением сжатию, а поэтому и применяющиеся для работы под сжимающими нагрузками, чаще всего испытываются на сжатие. Испытания на растяжение или сжатие производятся не только для определения свойств материалов, но и с целью испытаний прочности готовых изделий. Например, проволока, стержни, трубы, ткани и волокна испытываются на растяжение, тогда как кирпич, керамика, каменные блоки, чугун и бетон — на сжатие.

Когда реологические свойства материала определяются растяжением призматического стержня, его длина l_0 постепенно возрастает на Δl , а это вызывает постепенное уменьшение площади поперечного сечения от A_0 до A . Следовательно, если нагрузка P поддерживается постоянной, то растягивающее напряжение σ , определяемое выражением

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad (45.1)$$

постепенно возрастает. Растягивающее напряжение очень часто относится к начальному поперечному сечению образца A_0 . Например, при стандартном испытании на растяже-

¹⁾ Reiner M., глава в сборнике под редакцией Рейнера [Reiner (1954)].

ние мягкой стали для построения так называемой диаграммы напряжение — деформация используется номинальное напряжение, представляющее собой частное от деления нагрузки на первоначальную площадь поперечного сечения:

$$\sigma_0 = \frac{P}{A_0}. \quad (45.2)$$

Если нагрузка P поддерживается постоянной, то напряжение в образце в процессе опыта меняется. Это усложняет теоретические расчеты. Поэтому Андраде ¹⁾, Андраде и Чалмерсом ²⁾, а также Скотт-Блером с сотрудниками ³⁾ были предложены различные устройства для поддержания в образце постоянных напряжений с помощью соответствующего уменьшения нагрузки. Однако опыты с постоянной нагрузкой имеют свои преимущества. При этом не только достигается значительное упрощение аппаратуры, но, кроме того, преимущество состоит в том, что *один эксперимент* выполняет задачу серии экспериментов при изменяющемся σ и отклонение в поведении материала от поведения простого тупого тела или простой ньютоновой жидкости обнаруживается из одного опыта.

По этим причинам Лесерсич ⁴⁾ и Рейнер ⁵⁾ использовали экстензометры постоянной *нагрузки* для реологических исследований битумов. При обработке своих результатов Лесерсич строил графики деформации удлинения в процентах

$$D_t^C = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (45.3)$$

в зависимости от времени; наклон кривой являлся мерой скорости деформации \dot{D} . Вследствие постепенного увеличения напряжений \dot{D} также постепенно растет, и даже

¹⁾ Andrade da C. E. N., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 84, 1 (1911).

²⁾ Andrade da C. E. N., Chalmers B., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 138, 348 (1932).

³⁾ Scott Blair G. W., Survey of General and Applied Rheology, London, 1949, p. 159.

⁴⁾ Lethersich W., Brit. Electr. Applied Ind. Res. Assoc. Report A 1—83, 1941.

⁵⁾ Reiner M., Research on Rheological Properties of Bitumen, Pal. Board Scient. Ind. Res., 1948.

для простой ньютоновой жидкости с постоянной вязкостью η кривая $D_l^C - t$ не есть прямая линия, а обращена выпуклостью к оси t . Аналитическое описание такого рода кривой представляет собой трудную задачу. Однако Лесерсич ¹⁾ позднее установил следующее. Если на график нанести продольную деформацию по Свейнгеру ²⁾, т. е. отнесенную к длине в деформированном состоянии:

$$l = l_0 + \Delta l, \quad (45.4)$$

определяемую уравнением

$$D_l^S = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l - l_0}{l} = 1 - \frac{l_0}{l}, \quad (45.5)$$

то для простой ньютоновой жидкости получим прямую линию. Эта зависимость может быть определена из закона течения при растяжении для простой ньютоновой жидкости следующим образом.

При растяжении призматического образца один конец закреплен, а второй движется со скоростью

$$v_l = \frac{dl}{dt} = \dot{l}. \quad (45.6)$$

Скорость деформации, таким образом, определится соотношением ³⁾

$$f_l = \frac{v_l}{l} = \frac{\dot{l}}{l} = \frac{d}{dt} \ln l. \quad (45.7)$$

Для ньютоновой жидкости эта величина связана с растягивающим напряжением σ соотношением

$$\sigma = \lambda f_l, \quad (45.8)$$

где λ — коэффициент Трутона вязкости при растяжении. Подставляя выражение (45.7) в (45.8), получим:

$$\sigma = \lambda \frac{\dot{l}}{l}. \quad (45.9)$$

Как уже говорилось, если нагрузка P постоянна, то напряжения σ изменяются в течение опыта с изменением

¹⁾ L e t h e r s i c h W., J. Sci. Instrum. 21, 27, 111 (1944).

²⁾ Ср. с уравнением (29.5).

³⁾ Ср. с выражением (25.4).

длины l . Так как величина σ зависит от площади поперечного сечения, а последняя связана с l через объем образца, можно вычислить изменение σ с изменением l следующим образом. Предположим, что объем деформируемого материала постоянен ¹⁾, т. е.

$$V = Al = A_0 l_0. \quad (45.10)$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{Pl}{A_0 l_0} = \sigma_0 \frac{l}{l_0}. \quad (45.11)$$

Из формулы (45.9) найдем:

$$\sigma_0 = \lambda \frac{l_0}{l^2} \dot{l}. \quad (45.12)$$

Принимая во внимание (45.5), имеем:

$$\frac{l_0}{l^2} \dot{l} = \dot{D}_l^S, \quad (45.13)$$

и после интегрирования получим:

$$\frac{D_l^S}{\sigma_0} = \frac{t}{\lambda}. \quad (45.14)$$

Если материал является простой ньютоновой жидкостью, т. е. λ — величина постоянная, независимая от σ_0 , то графиком уравнения (45.14) является прямая линия, проходящая через начало координат. Этот вывод подтверждает метод Лесерсича.

Лесерсич применял тот же самый метод для конечного растяжения *простого* тела Гука, деформация которого определяется обычным способом (по Коши), т. е.

$$e_l^C = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1. \quad (45.15)$$

Уравнение аналогично (45.3), только Δl является здесь *обратимым* удлинением. Пусть E — модуль Юнга, тогда по аналогии с (45.8) имеем:

$$\sigma = E e_l^C \quad (45.16)$$

¹⁾ Лесерсич считал, что в данном случае изменением объема можно пренебречь.

Из выражений (45.11) и (45.15) находим:

$$\sigma_0 = ED_l^S, \quad (45.17)$$

где D_l^S определяется формулой (45.5). Если $\sigma_0 = E$, то из соотношения (45.17) найдем, что $D_l^S = 1$ и $l = \infty$. Равновесие возможно, только если σ_0 не превышает модуля Юнга. Введем

$$\sigma_0 = aE. \quad (45.18)$$

Множитель a не может быть больше единицы.

Таким образом, формулу (45.17) можно записать в виде

$$\frac{D_l^S}{\sigma_0} = \frac{1}{E}. \quad (45.19)$$

Из формул (45.14) и (45.19) следует, что если мы представим графически серию экспериментов при постоянной нагрузке в виде зависимости отношения D_l^S/σ_0 , т. е. удлинения по Свейнгеру (приходящегося на единицу номинального напряжения σ_0), от времени t и если при этом все кривые, полученные при разных нагрузках, сольются *в одну*, то это будет служить доказательством того, что (i) в случае вязкой жидкости это будет простая ньютонова жидкость, (ii) в случае упругого тела это будет простое гуково тело.

Следует иметь в виду, что D_l^S имеет в нашем случае лишь формальное значение, вытекающее из уравнения (45.11), и лишено физического смысла. Лесерсич рассматривал этот метод как внесение некоторой поправки.

Для тела Кельвина будем исходить из уравнения (15.2), которое запишем так:

$$\sigma = E(e_l^C + T_{\text{ret}}f_l), \quad (45.20)$$

где

$$T_{\text{ret}} = \frac{\lambda_f}{E} \quad (45.21)$$

является временем последействия.

Из соотношений (45.11), (45.7), (45.18) и (45.20) получим:

$$dt = T \frac{l_0}{al - el_0} \frac{dl}{l}. \quad (45.22)$$

Здесь для простоты записи опущены индексы.

Если упругость простая, как у тела Гука, то формула (45.22) примет вид

$$dt = \frac{T de}{[e^2 (a-1) + e (2a-1) + a]} . \quad (45.23)$$

Интегрируя, получим:

$$e/a = \frac{e^{t/T} - 1}{[a + (1-a) e^{t/T}]} . \quad (45.24)$$

Подставляя значение e из (45.15) в (45.24), имеем:

$$\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \sigma_0 = \frac{(1 - e^{t/T})}{E} . \quad (45.25)$$

Можно вместо $1 - l_0/l$, в соответствии с уравнением (45.5), написать D_l^S . Следует, однако, иметь в виду, что эта величина не является упругой деформацией материала; последняя определяется e^C .

Отсюда

$$\frac{D_l^S}{\sigma_0} = \frac{(1 - e^{t/T})}{E} . \quad (45.26)$$

Таким образом, при построении графиков зависимости деформации по Свейнгеру, отнесенной к единице номинального напряжения σ_0 , как функции от времени, результаты измерений укладываются на единую экспоненту, если упругость K -тела есть простая гукова. Это было подтверждено Брауном, Шенфельд-Рейнер и Траумом ¹⁾ для окисленных битумов 20—30 пен ²⁾, которые оказались необычайно упругими. Для них были получены следующие реологические коэффициенты: модуль упругости $E = 1,331 \cdot 10^6$ дин·см⁻², время последействия $T = 372$ сек, коэффициент вязкости Трутона $\lambda = 4,96 \cdot 10^8$ пз.

46. Технологические свойства. В этом разделе мы очень кратко осветим технологические свойства материалов. Для измерения некоторых из них разработана спе-

¹⁾ Braun I., Schoenfeld-Reiner R., Traum E., Bull. Res. Council Israel 2, 89—98 (1952).

²⁾ От англ. «pen» — сокращенное от «пенетрация». (Прим. ред.)

циальная аппаратура, в то время как исследования других свойств еще не достигли этой степени. В последнем случае специалисты определяют свойство материала органолептически — на ощупь и по внешнему виду. Здесь мы сталкиваемся с психофизиологическими проблемами реологии, упомянутыми в § 1. За исключением тиксотропии, мы считаем возможным ограничиться здесь составлением краткого словаря, с помощью которого физик, столкнувшийся в литературе со специальным термином, получил бы необходимые сведения. Читатель может найти более полную информацию на эту тему в книге Скотт-Блера [Scott - Blair (1949)], где приводятся многочисленные ссылки на литературные источники.

Термин *тиксотропия* был впервые введен Фрейндлихом с сотрудниками ¹⁾ для определения изотермического обратимого перехода геля в золь при механическом воздействии. Позднее он получил более широкое толкование как «свойство тела, при котором отношение касательного напряжения к скорости сдвига временно понижается в результате предшествующей деформации». Здесь существен фактор времени, отличающий тиксотропию от структурной вязкости. Грин [Green (1949)] предложил прибор, с помощью которого производятся количественные измерения тиксотропии.

Эрмит ²⁾ ввел термин «антитиксотропия» для определения *увеличения* упомянутого выше отношения. Тиксотропию и антитиксотропию следует отличать от структурной вязкости. И структурная вязкость, и тиксотропия связаны с обратимым падением вязкости, вызванным ростом напряжений сдвига, с последующим восстановлением вязкости в состоянии покоя. Однако в случае структурной вязкости восстановление происходит практически мгновенно, без запаздывания, тогда как в случае тиксотропии восстановление вязкости требует некоторого времени, иногда значительного. Антитиксотропия отличается от тиксотропии тем, что в этом случае рост касательного

¹⁾ Freundlich H., Thixotropy, Paris, Hermann and Co., 1935. [Русский перевод: Фрейндлих Г., Тиксотропия, ГОНТИ, М. — Л., 1939. (Прим. ред.)]

²⁾ L'Hermite, Ann. Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, № 92, 1949.

напряжения вызывает увеличение вязкости. От структурной вязкости она отличается тем, что восстановление вязкости системы происходит, как и в случае тиксотропии, с запаздыванием. Случаев тиксотропии известно очень много, но антитиксотропия представляет собой относительно редкое явление.

Удивительный пример антитиксотропии был обнаружен Качальским ¹⁾ и его сотрудниками в 5%-ном растворе полиметакриловой кислоты в воде. Раствор обнаруживал

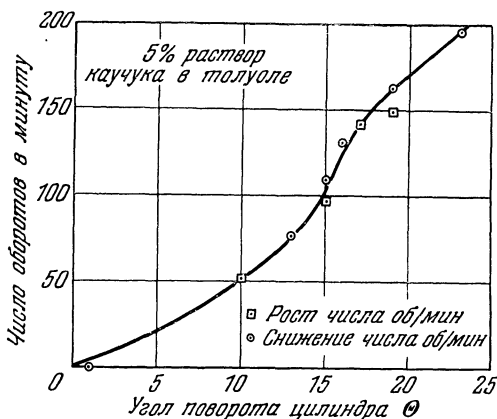


Рис. 42. Кривая течения Оствальда для раствора каучука в толуоле.

350-кратное увеличение вязкости после того, как он в течение одной минуты подвергался сдвигу со скоростью 10 сек^{-1} .

Различие между тремя типами переменной вязкости можно продемонстрировать с помощью кривых ²⁾ для следующих веществ: 1,5%-ный раствор натурального каучука в толуоле обнаруживает структурную вязкость (рис. 42), очень мягкий битум тиксотропно разрушается при течении (рис. 43), и 5%-ный раствор полиизобутилена в тетралине обнаруживает антитиксотропию (рис. 44).

¹⁾ Eliassaf J., Katchalsky A., Silberberg A., Nature **176**, 1119 (1955).

²⁾ Crane J., Schiffer D., Int. Symp. Macromol. Chem. Rehovoth., 1956.

По оси ординат на приведенных графиках отложена окружная скорость внешнего цилиндра ротационного вискозиметра и по оси абсцисс — угол закручивания проволоки (являющийся мерой момента сил, а следовательно, и касательных напряжений), на которой подвешен внутренний цилиндр.

Было замечено, что петля антитиксотропии не наблюдается при вторичном испытании; после выдержки раствора в течение 24 часов петля обнаруживалась вновь, но была при этом значительно уже. Таким образом, влияние предшествующего сдвига уменьшается, если раствор выдерживается в состоянии покоя.

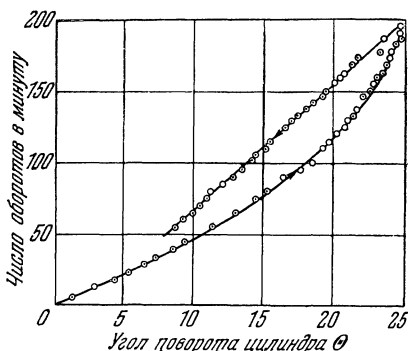


Рис. 43. Кривая тиксотропного течения мягкого битума.



Рис. 44. Кривая антитиксотропного течения раствора полиизобутилена в тетралине.

Заканчивая описание тиксотропии, переходим к словарию, в котором, как было отмечено выше, дадим разъяснения по некоторым наиболее часто применяемым терминам.

Шероховатость (roughness) и *гладкость* (smoothness)— свойства, воспринимаемые осязанием при движении по поверхности. Если движение отсутствует, мы чувствуем *ровность* (eveness) или *неровность* поверхности (uneveness). В резиновой промышленности в качестве меры шероховатости используется *морщинистость* (rugosity). Однако тот же самый термин употребляется для описания обратной величины сферичности песка, т. е. *неровности* (ruggedness) его частиц. В последнем случае употребляется также термин *коэффициент угловатости* (coefficient of angularity).

Если взять кусочек глины пальцами обеих рук и попеременно растягивать и сжимать его, то сопротивление глины сначала будет малым, затем резко возрастет. Это свойство называется *схватыванием* (back-lash). Если какой-нибудь материал, например расплав серы или гуммиарабик, течет через капилляр и давление внезапно падает до нуля, то материал начинает течь обратно. Это явление названо *упругостью течения* (flow-elasticity). Повидимому, существует тесная связь между упруго-текучестью и способностью материала упрочняться при вытягивании его в длинные упругие пряди или нити. Это последнее свойство называется по-немецки Spinnbarkeit ¹⁾ и по-английски leptogenesis.

Микромеритика (micromeritics) занимается реологией тонкодисперсных частиц.

Восстановление (redress) — явление обратимости под влиянием внешних факторов; когда таким фактором является теплота, оно называется *термовосстановлением*.

Реодеструкция — необратимое механическое разрушение гелей в процессе течения.

Реопексия — явление затвердевания тиксотропного геля, ускоряющееся при медленном течении.

Липкость (stickiness) определяется для грунтов как сила, необходимая для отрыва пластины, прижатой к грунту. Это свойство мало отличается от *адгезии* (adhesivity) или *клейкости* (tack). Последняя существенна в печатном деле и определяется как «поверхностное свойство пластических материалов, благодаря которому два куска материала, соприкоснувшись друг с другом, сопротив-

¹⁾ То есть способность материала к прядению. (Прим. ред.)

ляются разделению». Клейкость изучалась Грином ¹⁾. Существует простая машина для измерения адгезии печатных красок.

Деформационное упрочнение (workhardening, strain-hardening) наиболее часто применяется как название явления повышения предела текучести в результате большой пластической деформации, но в некоторых случаях обозначает и повышение вязкости. Некоторыми авторами описано *деформационное разупрочнение*.

Структурная турбулентность проявляется у жидкостей, обладающих структурной вязкостью, при скоростях значительно ниже критической скорости рейнольдсовой турбулентности. Рейнер ²⁾ высказал предположение, что это явление, как и переменная вязкость, связано с разрушением внутренней структуры при касательных напряжениях, превосходящих некоторый предел.

Пенетрация и дуктильность (ductility) — два термина, используемые в технологии битумов. Пенетрация определяется по глубине погружения весомой иглы в чашу с битумом. Дуктильность определяется по испытаниям на растяжение. Брикет, изготовленный из битума, растягивается с определенной скоростью до тех пор, пока нить, соединяющая концы, не разорвется. Длина, при которой нить битума разрывается, принимается за его дуктильность.

В заключение мы должны сказать следующее. С технологической точки зрения разница между *твердыми телами* и *жидкостями* весьма значительна, реология же не считает их существенно различными. Термин «реология» приводит на ум выражение Гераклита «*παντα ῥεει*»³⁾. С таким же основанием мы можем сказать: «любое тело есть твердое». Между жидкостями и твердыми телами имеется скорее количественное, чем качественное различие; это положение уже отмечалось в § 16. Выше мы, например, считали бетон жидкостью со временем релаксации $\approx 10^6$ сек, а воздух — твердым телом со временем релаксации $\approx 10^{-10}$ сек. Если же считать бетон твердым телом и воздух жидкостью, то такое рассмотрение не представляет интереса для реолога.

1) Green H., Industr. Engng. Chem. 13, 632—639 (1941).

2) Reiner M., Kolloid-Z. 39, 314 (1926).

3) Греч.— все течет. (Прим. ред.)

Е. ДОБАВЛЕНИЯ

К §§ 1—3. Грунт в механике грунтов считается сплошной средой, перемещения которой являются непрерывными функциями координат, и в связи с этим к ней можно применять аппарат феноменологической макрореологии, рассматриваемый в этой книге. Такой подход неприменим при рассмотрении некоторых проблем динамической геологии и практики шахтных выработок, так как земная кора представляет собой совокупность слоев различного состава. Литвинишин¹⁾ при рассмотрении такого рода задач применял уравнения теории стохастических процессов.

К § 11. Уравнение ньютоновой жидкости было экспериментально подтверждено опытами Пуазейля, который получил уравнение (14.12,1), выведенное ранее теоретически Гагеном из формулы (11.1). Пуазейль изучал течение крови в артериях, однако свое уравнение он получил из экспериментов с водой. Кровь является суспензией, обнаруживающей структурную вязкость. Джеффорд и Найсли²⁾ установили, что «сегменты артерий скорее представляют собой усеченные конусы, чем цилиндры». Течение крови по кровеносным сосудам еще не изучено достаточно хорошо.

К § 13. Скотт-Блер [S c o t t B l a i r (1949)] предлагал моделировать тело Сен-Венана поршнем, движущимся в цилиндре, который наполнен глинистой пастой с определенным пределом текучести.

Другая модель была предложена Паэзом³⁾ для бетона. Модель, описывающая кривизну диаграммы зависимости

¹⁾ Litwiniszyn J., Nadbitka z Arch. Mech. Stos. 8, 393—411 (1956).

²⁾ Jefford J. V., Knisely M. H., Angiology 7, 105—136 (1956).

³⁾ Torroja E., Paez A., Set and reinforced concrete. Chap. VIII в сб. под ред. Reiner, 1954.

напряжений от деформаций, появление остаточных деформаций при разгрузке, предельное значение напряжений, соответствующее пределу прочности материала, состояла из большого количества поршней типа Скотт-Блера, связанных пружинами. Затем вместо поршней он предложил поставить внутрь цилиндров пружины, передающие нагрузки цилиндрам посредством трения у стенок. Связывая цилиндры с резервуаром вязкой жидкости таким образом, что жидкость всасывается или выдавливается из цилиндра, если поршень движется вверх или вниз, он получил модель, описывающую деформации при усадке и набухании, т. е. вызванные абсорбцией или потерей воды в процессе твердения.

Ольшак и Литвинишин ¹⁾, моделируя процесс нелинейного течения, заменили трубку сосудом с переменным диаметром.

К § 14. Биография Шведова приведена в статье М. П. Воларовича и С. М. Леви [Коллоидный журнал 18, № 2, 129—134 (1956)]. Здесь же приведено высказывание о приоритете ученика Шведова Вейнберга в выводе уравнения (14.24).

Ротационный прибор с коаксиальными цилиндрами назван по имени Куэтта. Он описан Гатчеком ²⁾, который усовершенствовал этот прибор.

Используя прибор этого типа, Пападакис ³⁾ установил, что концентрированные суспензии цемента могут рассматриваться как бингамовы тела.

Применяя критерий текучести Мизеса (36.6), Пасли и Слибар ⁴⁾ записали второе уравнение (14.3) в виде
$$s \left(1 - \frac{\dot{\vartheta}_t}{\sqrt{-II_{s(0)}}} \right) = 2\eta_{pl}\dot{d}$$
 и решили его для случая течения бингамова материала в подпятнике.

¹⁾ Olszak W., Litwiniszyn J., Nadbitka z Arch. Mech. Stos. 5, 557—583 (1953).

²⁾ H a t s c h e k E., The viscosity of liquids, London, Bell, 1928. [Русский перевод: Г а т ч е к Э., Вязкость жидкостей, ГТТИ, Москва, 1932. (Прим. ред.)]

³⁾ P a p a d a k i s M., Rec. des Matériaux de construction, Mai 1955.

⁴⁾ P a s l a y P. R., S l i b a r A., Öst. Ing. Arch. 10, 328 (1956).

К § 16. Броэр ¹⁾ получил точное решение уравнений для периодического ламинарного течения в цилиндрической трубке и приближенное для течения пленки переменной толщины.

К § 18. Различие в поведении упругого золя, такого, как L -тело, и релаксирующего геля, такого, как J -тело, при простом сдвиге обсуждалось Рейнером ²⁾. В золе главные оси (i) тензора течения наклонены под углом 45° к направлению течения, и поэтому тензор напряжений, обусловленный течением материала, коаксиален с тензором скоростей течения. При деформациях сдвига в геле главные оси тензора упругой деформации располагаются под углом, *меньшим* 45° . Только в том случае, когда этот угол достигает 45° , возникает течение, обусловленное релаксацией. Напряжение здесь коаксиально тензору упругой деформации и не коаксиально тензору течения. Это вызывает понижение вязкости даже в том случае, когда вязкость жидкой фазы является постоянной.

К § 25. Мнение, что только мера Хенки пригодна для описания конечных деформаций, обусловленных вязким или пластическим течением, подтверждается еще одним аргументом. Представим себе, что пластическое удлинение стержня с первоначальной длиной l_0 происходит *ступенями*. Если мы вначале удлиним стержень на Δl , то относительная деформация будет $\Delta l/l_0$. Теперь стержень длиной $l_0 + \Delta l$ подвергнем дополнительному удлинению Δl . Возникает вопрос: чему теперь будет равняться его удлинение? В соответствии с мерой Коши, если второе удлинение протекает непосредственно вслед за первым, так что обе операции могут приниматься за одну, то второе относительное удлинение будет также равно $\Delta l/l_0$ и полное $2\Delta l/l_0$.

Однако если дополнительная вытяжка будет рассматриваться как совершенно новая операция, то второе относительное удлинение будет равно $\Delta l/(l_0 + \Delta l)$ и полное $\Delta l [1/l_0 + 1/(l_0 + \Delta l)]$, т. е. отлично от $2\Delta l/l_0$.

Рассмотрим теперь ступенчатое деформирование в свете меры Хенки. Имеем: $l_1 = l_0 + \Delta l$, $l_2 = l_1 + \Delta l = l_0 + 2\Delta l$

¹⁾ Broer L. J. F., Appl. Sci. Res. A 6, 226—236 (1956).

²⁾ Reiner M., Bull. Res. Counc. Israel 1, 5—25 (1951).

и окончательное удлинение определится выражением

$$e^H = \ln \left(\frac{l_2}{l_0} \right). \quad (1)$$

Правая часть этой формулы может быть записана следующим образом:

$$\ln \left(\frac{l_2}{l_0} \right) = \ln \left(\frac{l_2}{l_1} \frac{l_1}{l_0} \right) = \ln \frac{l_2}{l_1} + \ln \frac{l_1}{l_0}. \quad (2)$$

Поэтому, если стержень длиной l_0 был растянут при Δl при первой операции и на Δl — при второй операции и деформации вычислялись по Хенки, то результат будет тем же самым, как при растяжении на $2\Delta l$ в один прием. Но это будет не так, если деформации определялись по Коши. Математически это может быть выражено так: удлинения по Хенки образуют группу, а удлинения по Коши группы не образуют.

К § 26. Для нелинейных ньютоновых жидкостей употребляется также термин *псевдопластики*. Этот термин возник в то время, когда Бингам ввел понятие о пластичности как причине аномалии вязкости. Считалось, что представления Бингама пригодны для любого случая, когда жидкость имеет переменную величину эффективного коэффициента вязкости. Кракауэром ¹⁾ описан метод, при котором, используя уравнение (14.24), можно отличить структурную вязкость нелинейной ньютоновой жидкости от пластической вязкости бингамова тела по кривым течения материалов в ротационном вискозиметре.

К § 28. Де Вале и независимо от него Оствальд установили степенной закон $\dot{\gamma} = k\tau^n$ для описания структурной вязкости. Этот закон рассматривался как простая эмпирическая зависимость, имеющая довольно большое практическое значение. Однако Шеле и Тим ²⁾ показали, что величина n имеет определенный физический смысл.

Суини и Гекклер ³⁾ исследовали вязкость концентрированных суспензий стеклянных шариков в среде такой

¹⁾ Krakauer V. O., J. Appl. Phys. 21, 850—852 (1950).

²⁾ Scheele W., Timm T., Kolloid-Z. 120, 103—119 (1951); 121, 140—143 (1951).

³⁾ Sweeney K. H., Geckler R. D., J. Appl. Phys. 25, 1135—1145 (1954).

же плотности с помощью ротационного вискозиметра и показали, что формула, экспериментально полученная Рейнером:

$$\Phi = \frac{\Phi_0 + \Phi_\infty \tau^2 / c^2}{1 + \tau^2 / c^2},$$

лучше удовлетворяет опытным данным, чем уравнение (28.13).

Шульц-Грунов ¹⁾ предложил записывать уравнение (28.1) $\dot{\gamma} = f(\tau)$ в виде $\dot{\gamma}/C = f(\tau/A)$, где A и C — константы, имеющие размерности τ и $\dot{\gamma}$. Он установил, что для некоторых жидкостей имеет место зависимость $\dot{\gamma}/C = \text{sh } \tau/A$, впервые предложенная Прандтлем ²⁾.

Павловский ³⁾ обосновал причины возникновения структурной вязкости из некоторых термодинамических соотношений. В другой работе ⁴⁾ им был подвергнут критике термин «вязкость» в применении к некоторым неньютоновым жидкостям. Он заявил также, что формула Шульц-Грунова не может рассматриваться как общее реологическое уравнение.

К § 29. Здесь следует изложить выкладки, которые привели к общему выражению меры деформации по Хенки и пригодны также для мер Коши, Свейнгера и других. Если мы желаем получить только выражения для ламинарного сдвига в декартовых или цилиндрических координатах, то можно применять два метода. Один метод описан в книге Л о в е (1927), Art. 37, 49, второй основан на использовании кругов Мора, приведенных в § 7, 8. Изложение этих методов приводится ниже.

(i) Пусть при простом сдвиге имеем:

$$x_1 = x_0 + Sy, \quad y_1 = y_0, \quad z_1 = z_0. \quad (1)$$

Ляв [L o v e (1927), Art. 37] из простых геометрических

¹⁾ Schultz-Grunow F., Kolloid-Z. 138, 167 (1954).

²⁾ Prandtl L., Vandey Fr., Z. angew. Math. Mech. 30, 169 (1950).

³⁾ Pawlowski J., Kolloid-Z. 131, 11 (1953); 138, 6 (1954).

⁴⁾ Pawlowski J., Kolloid-Z. 143, 92—97 (1955).

соображений получил выражения для λ :

$$\lambda_{(i)} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \lambda_{(j)} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \lambda_{(k)} = 1, \quad (2)$$

причем оказалось, что главные оси деформации являются биссектрисами угла $\frac{\pi}{2} + \alpha$ с осью x и α — угол поворота главных осей деформации. Напряжения, обусловленные деформациями, имеют главные компоненты, определяемые формулой (29.1):

$$s(i) = \lambda_L I_e + 2\mu e(i). \quad (3)$$

Компоненты напряжений по отношению к осям x , y и z можно получить из уравнений Лява (см. § 49):

$$\left. \begin{aligned} s_{xx} &= \frac{1}{2} [s(i) + s(j)] - \frac{1}{2} [s(i) - s(j)] \sin \alpha, \\ s_{yy} &= \frac{1}{2} [s(i) + s(j)] + \frac{1}{2} [s(i) - s(j)] \sin \alpha, \\ s_{zz} &= s(k), \\ s_{xy} &= \frac{1}{2} [s(i) - s(j)] \cos \alpha, \quad s_{yz} = s_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя выражения для главных напряжений из формулы (3) в (4), получим:

$$\left. \begin{aligned} s_{xx} &= \lambda_L I_e + \mu \{e(i) + e(j) - [e(i) - e(j)] \sin \alpha\}, \\ s_{yy} &= \lambda_L I_e + \mu \{e(i) + e(j) + [e(i) - e(j)] \sin \alpha\}, \\ s_{xy} &= -\mu [e(i) - e(j)] \cos \alpha, \quad s_{yz} = s_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из соотношений (1) $e(k) = 0$, и поэтому $s_{zz} = \lambda_L I_e$. Если мы затем рассмотрим пять мер деформации, определяемых формулами (29.4) — (29.8), то получим компоненты напряжений, приведенные в таблице 9¹⁾ в функции S ; см уравнение (1).

Таблица подтверждает уравнения (29.22) и (29.30). Показано также, что поперечные эффекты обнаруживаются и в случае мер Коши и Свейнгера.

¹⁾ Reiner M., Proc. 8-th Internat. Congr. Theoret. Appl. Mech., Istanbul, 1954.

Таблица 9

Напряжения при конечном простом сдвиге

Напряжение	Деформация				
	$e^C = \lambda - 1$	$e^G = \frac{\lambda^2 - 1}{2}$	$e^H = \ln \lambda$	$e^A = \frac{1 - 1/\lambda^2}{2}$	$e^S = 1 - 1/\lambda$
$\frac{(s_{xx} - s_{zz})}{2\mu}$	$\frac{2 + S^2}{CS} - 1$	$\frac{S^2}{2}$	$\frac{1}{2C} \ln \frac{C+1}{C-1}$	0	$1 - \frac{2}{CS}$
$\frac{(s_{yy} - s_{zz})}{2\mu}$	$\frac{2}{CS} - 1$	0	$-\frac{1}{2C} \ln \frac{C+1}{C-1}$	$-\frac{S^2}{2}$	$1 - \frac{2 + S^2}{CS}$
$\frac{s_{xy}}{2\mu}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{S}{2}$	$\frac{1}{CS} \ln \frac{C+1}{C-1}$	$\frac{S}{2}$	$\frac{1}{C}$
$\frac{(s_m - s_{zz})}{2\mu}$	$\frac{CS - 2}{3}$	$\frac{S^2}{6}$	0	$-\frac{S^2}{6}$	$\frac{2 - CS}{3}$

$$C = \sqrt{1 + 4/S^2}$$

(ii) Пусть имеется лист упругого материала, например резины, закрепленный на двух рейках, который может выдерживать большие деформации, как показано на рис. 45. Пусть на листе начерчен круг единичного радиуса. Представим себе, что одна из реек закреплена, а вторая смещается параллельно первой. В случае простого однородного сдвига круг деформируется в эллипс. На рисунке показаны две стадии деформации. Построение эллипса представляет собой чисто геометрическую задачу и ничего общего не имеет с реологией. Оно изображено на рис. 45, б. Два взаимно перпендикулярных радиуса в направлениях \bar{i} и \bar{j} превратились в большую и малую полуоси l_i и l_j эллипса с направлениями \bar{i} и \bar{j} , также перпендикулярными друг к другу и представляющими собой главные направления деформации. Заметим, что оси \bar{i} и \bar{j} повернулись на угол $\alpha = \arctg(\gamma/2)$ и приняли направления \bar{i} и \bar{j} . Это известное нам вращение, связанное с деформацией сдвига. Круги Мора для рис. 45, б и в здесь также представлены. Заметим, что ось абсцисс

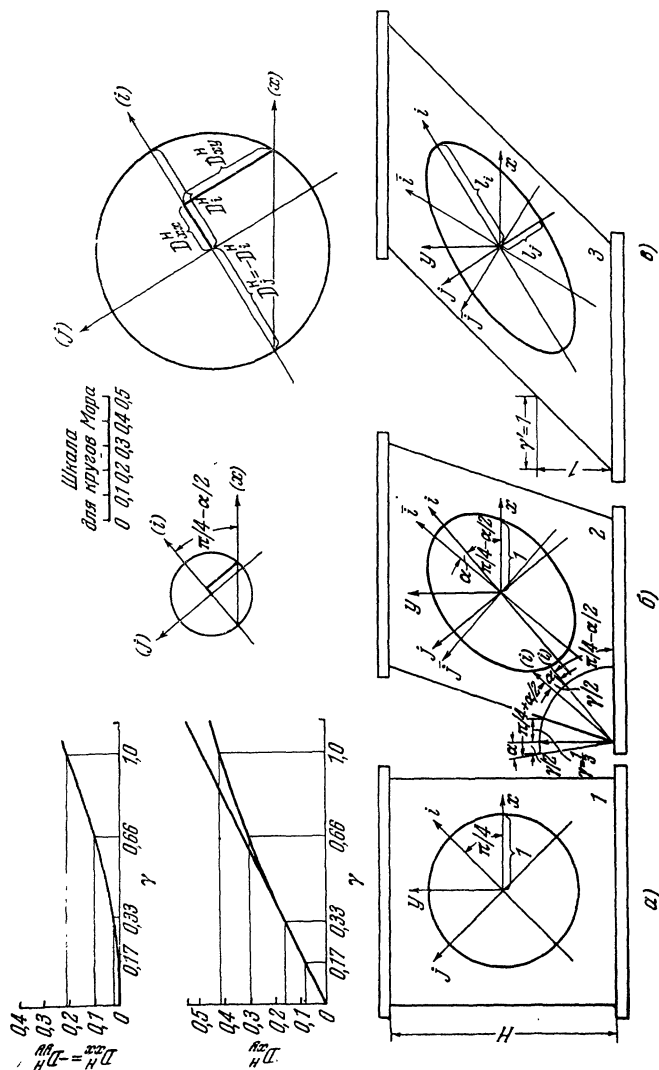


Рис. 45. Простой сдвиг согласно мере деформации Хенки. Здесь D — тензор деформации, γ — градиент перемещений, α — угол поворота, i, j — главные направления до поворота, i, j — то же после поворота, причем (i) параллельно i .

круга Мора, обозначенная индексом (i), должна быть параллельна направлению i . Чтобы построить круг, мы должны знать главные удлинения D_i и D_j . Применяя меру Хенки, имеем ¹⁾:

$$D_i^H = \ln l_i. \quad (6)$$

Величину l_i можно измерить на рисунке. Так как площадь круга при деформации не изменилась, то получим:

$$D_a^H = D_i^H + D_j^H = 0 = D_{xx}^H + D_{yy}^H = I_D^H, \quad (7)$$

откуда

$$D_j^H = -D_i^H. \quad (8)$$

Из круга Мора определяются D_{xy}^H и $D_{xx}^H = -D_{yy}^H$. Они представлены на графиках как функции γ . Аналитические выражения этих функций приведены в центральном столбце таблицы.

К § 32. Падден и Де-Уитт ²⁾ исследовали концентрированные растворы полиизобутилена, причем полученные ими результаты они объясняли на основе предложенного Де-Уиттом реологического уравнения, которое содержит вихрь ω_{lm} течения жидкости.

Гизекус ³⁾ обобщил уравнение (32.2), подставив в него в дополнение к симметричному метрическому тензору течения f_{lm} также антисимметричный тензор ω_{lm} , отнесенный к координатной системе, главные оси которой совпадают с тензором f_{lm} . Другими словами, ω_{lm} определяет вращение главных осей f_{lm} конвективной системы координат (см. § 7, ϵ). В результате было получено реологическое уравнение

$$\begin{aligned} s = & \eta_0 \delta + 2\eta_1 f + 4\eta_2 f^2 + 2\zeta_1 (\omega f - f \omega) + 4\zeta_2 (\omega f^2 - f^2 \omega) + \\ & + 8\zeta_3 f (\omega f - f \omega) f + 4\xi_0 \omega^2 + 4\xi_1 (\omega^2 f + f \omega^2) + \\ & + 8\xi_2 (\omega^2 f^2 + f^2 \omega^2) + 8\psi_1 \omega (\omega f - f \omega) \omega + \\ & + 16\psi_2 \omega (\omega f^2 - f^2 \omega) \omega + 32\psi_3 f \omega (\omega f - f \omega) \omega f. \end{aligned}$$

¹⁾ Аналогичным образом может использоваться любая другая мера.

²⁾ Padden F. J., De Witt T. W., J. Appl. Phys. 25, 1086—1091 (1954).

³⁾ Gieseke H., Kolloid-Z. 147, 29—45 (1956).

Двенадцать вязкостных параметров от η_0 до ψ_3 могут быть в общем случае функциями шести инвариантов тензоров f и ω . Симметричные тензоры s и f не являются коаксиальными.

Как видно из рис. 45, частицы материала в некоторой стадии деформации располагаются вдоль главных осей и, таким образом, не сдвигаются в данный момент. Но в следующий момент их направления уже не совпадают с главными осями. Это явление может оказать влияние на реологическое поведение вязко-упругой жидкости или дисперсной системы, но вероятно не может иметь какого-либо значения в случае однородной ньютоновой жидкости. Приведенное уравнение эквивалентно формуле Олдройда¹⁾.

Браун²⁾ получил дифференциальные уравнения движения для жидкости, определяемой реологической формулой (32.2), обобщив, таким образом, уравнения Навье—Стокса (11.6).

К § 33. Шульц-Грунов³⁾ установил, что наличие отверстия в статоре прибора Вейссенберга (рис. 35), а также аналогичных приборов, имеющих манометры, оказывает влияние на течение и на величину давления. Он обнаружил это явление при исследованиях оптическим методом течения жидкости в ротационном вискозиметре, сделав в статоре прорезь шириной, равной половине ширины зазора. При этом не нужно было делать замеров давления.

К § 36. Надаи⁴⁾ показал, что $\sqrt{-II_{s(0)}}$ пропорционален октаэдрическому касательному напряжению. В связи с этим критерий Мизеса может определяться предельным октаэдрическим напряжением.

К § 37. Торделла⁵⁾ подтвердил, что критерий прочности, выражаемый уравнением (37.7), применим также и к разрыву аморфных полимеров, продавливаемых через капилляр.

1) Oldroyd J. G., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 200, 523 (1950).

2) Braun I., Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 2, 1—8 (1956).

3) Schultz-Grunow F., Z. VDI 9, 409—416 (1955).

4) Nadai A., J. Appl. Phys. 8, 205 (1937).

5) Tordella J. P., J. Appl. Phys. 27, 454—458 (1956).

К § 37, в. Бен-Ари ¹⁾ определял предел прочности гелей напалма, продавливая их через капилляр и взвешивая выдавленный столбик, оторвавшийся под действием собственного веса. Предел прочности определялся как частное от деления веса столбика материала на площадь поперечного сечения. Он нашел, что прочность обнаруживает линейную зависимость от скорости растяжения.

К §§ 39 и 40. Лифсон ²⁾ теоретически исследовал течение растворов через ультратонкие капилляры и установил некоторое повышение эффективной вязкости, обусловленное неоднородностью течения. Это повышение вязкости зависит от отношения размера макромолекулы к диаметру капилляра.

К § 40. Гизекус ³⁾ принимал во внимание броуново движение. Исходя из теории, сходной с теорией Райзмана и Кирквуда ⁴⁾, он рассмотрел суспензию упругих гантелей. Он показал, что все двенадцать параметров, предложенных в этой же статье (см. приложение к § 32), отличны в общем случае от нуля и зависят от того, являются ли гантели жесткими или упругими. Суспензия жестких гантелей является упругой жидкостью, причем энтропийная упругость ее уменьшается по мере ориентации частиц.

К § 43. Ригден ⁵⁾ исследовал реологическое поведение суспензий в неводных средах с помощью кривых консистентности. Майрс, Миллер и Зеттлемойер ⁶⁾ применили этот метод для изучения дисперсий карбоната кальция и глины и установили существование критической концентрации, при которой появляется структурная вязкость.

К § 44. Невилл ⁷⁾ дал обзор различных теорий ползучести бетона.

¹⁾ Ben-Arie M., J. Polymer Sci. 17, 179—190 (1955).

²⁾ Lifson S., J. Polymer Sci. 20, 1 (1956).

³⁾ Gieseckus H., Kolloid-Z. 147, 29—45 (1956).

⁴⁾ Riseman J., Kirkwood J. G., статья в сб. под редакцией Eirich, Vol. I.

⁵⁾ Rigden P. J., Road Research Technical Paper № 28, London, 1954.

⁶⁾ Myers R. R., Miller J. C., Zettlemoyer A. C., J. Appl. Phys. 27, 468—471 (1956).

⁷⁾ Neville A. M., J. Amer. Concr. Inst. 27, 47—60 (1955).

Вискозиметры и пластометры детально описаны Мескатом ¹⁾.

Прибор типа Куэтта с электростатическим динамометром для измерения вязкости в области сантипуазов описан Эйзенбергом и Фреем ²⁾.

Вельтман и Кунс ³⁾ описали прибор типа Куэтта, автоматически записывающий кривые течения для всех видов неньютоновых материалов.

Вельтман ⁴⁾ вычислил безразмерные параметры из кривых консистентности неньютоновых текучих материалов (как пластических, так и вязких) и использовал их для построения диаграмм, определяющих сопротивление движению таких материалов по трубам.

К § 46. Торнтон ⁵⁾ исследовал временную зависимость вязкости тиксотропных материалов в ротационном вискозиметре с коаксиальными цилиндрами.

Грин и Вельтман ⁶⁾ провели обширные экспериментальные исследования тиксотропных материалов с помощью прибора Грина. Дальгрэн ⁷⁾ аналитически обработал их результаты.

Бестул и Брайант ⁸⁾ недавно исследовали полиизобутилены и их производные и получили результаты, «согласующиеся с развитыми Рейнером теориями механизма Оствальда ранней турбулентности и ее изменения, связанного с энергией молекулярных разветвлений».

¹⁾ Meskat W., Messen und Regeln in der chemischen Technik, стр. 698—781, Berlin, Springer, 1957.

²⁾ Eisenberg H., Erei E. H., Bull. Res. Counc. Israel 3 (1954); J. Polymer Sci. 14, 417—426 (1954).

³⁾ Weltmann R. N., Kuhns P. W., Nat. Adv. Com. Aeronautics, Technical Note 3510, Washington, 1955.

⁴⁾ Weltmann R. N., Nat. Adv. Com. Aeronautics, Technical Note 3397, Washington, 1955.

⁵⁾ Thornton S., Proc. Phys. Soc. Lond. B 46, 115—119 (1953).

⁶⁾ Green H., Weltmann R. N., Industr. Engng. Chem., Anal. Ed. 15, 201—206 (1943); 18, 167—172 (1946).

⁷⁾ Dahlgren S. E., Trans. Chalmers Univ., 1955, № 159.

⁸⁾ Bestul A. B., Bryant C. B., J. Polymer Sci. 19, 255 (1956).

БИБЛИОГРАФИЯ

- Классическими трудами по упругости и гидродинамике ньютоновой жидкости остаются книги: Love A. E. H., *Elasticity*; Cambridge, Univ. Press, 1906—1927. [Русский перевод: Ляв А., *Математическая теория упругости*, ОНТИ, М.—Л., 1935.] Lamb H., *Hydrodynamics*, Cambridge, Univ. Press, 1879—1932. [Русский перевод: Ламб Г., *Гидродинамика*, Гостехиздат, М.—Л., 1947.]
- Hill R., *Plasticity*, Oxford, Clarendon Press, 1950. [Русский перевод: Хилл Р., *Математическая теория пластичности*, Гостехиздат, М., 1956.] Автор этой книги пытался охватить в полном объеме классическую пластичность, что ему, однако, не удалось сделать.
- В дополнение следует рекомендовать книги:
- Nadai A., *Plasticity*, New York — London, McGraw Hill Book Co., 1931. [Русский перевод: Надаи А., *Пластичность*, ОНТИ, М.—Л., 1936.]
- Prager W., Hodge P. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, N. Y., J. Wiley and Sons, London, Chapman and Hall, 1951. [Русский перевод: Прагер В., Ходж Ф., *Теория идеально пластических тел*, ИЛ, М., 1956.]
- Исчерпывающий обзор новых работ по теории упругости и гидродинамике дан в статьях: Truesdell C., *J. Rat. Mech. a. Analysis* 1, 125—300 (1952); 2, 593—616 (1953).
- Феноменологическая реология изложена в двух учебниках: Rein M., *Twelve Lectures on Theoretical Rheology*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1949. Lewis H. K., *Deformation and Flow*, London, 1949.
- Обзор более ранней литературы дан Карманом (v. Kármán) в главе 31 тома IV *Encyclopaedie der Math. Wiss.*, 1913, под заглавием «*Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre*», так как термин «реология» еще не был тогда известен.
- Все другие книги по реологии перечислены в алфавитном порядке по фамилиям авторов.
- Alfrey T., *Mechanical Behavior of High Polymers*, Interscience, N. Y., 1948. [Русский перевод: Алфрей Т., *Механические свойства высокополимеров*, ИЛ, М., 1952.] ¹⁾

¹⁾ См. также Гуль В. Е., *Прочность полимеров*, изд-во «Химия», М., 1964. (*Прим. ред.*)

- Committee for the study of viscosity. First report on viscosity and plasticity, Nordemann Publ., Amsterdam, 1935, Second report. Nordemann Publ., Amsterdam, 1938.
- E i r i c h F. R. (редактор), Rheology, Theory and Applications, New York, Academic Press, v. 1, 1956; v. 2, 1958; v. 3, 1960. Это трехтомное издание содержит 45 глав, написанных различными специалистами, в которых дан исчерпывающий обзор. [Русский перевод: Реология, теория и приложения, ИЛ, М., 1962.]
- F r e u d e n t h a l A. M., The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures, New York — London, John Wiley, 1950.
- G r e e n H., Industrial Rheology and Rheological Structures, New York — London, 1949. Освещена тиксотропия.
- G r o s s B., Theories of Viscoelasticity, Paris, Hermann & Cie, 1953
- H o u w i n k R., Elasticity, Plasticity and the Structure of Matter, Cambridge Univ. Press, 1937 (Elastizität, Plastizität und die Struktur der Materie, Dresden und Leipzig, Steinkopf-Verlag, 1938—1952) ¹⁾. Рассматривается реология стекла, смол, асфальта, каучука и резины, гуттаперчи, балаты, целлюлозы, крахмала, протеинов, теста, красок, лаков, глины и серы.
- J e f f r e y s H., The Earth. Cambridge Univ. Press, 1929—1952. [Русский перевод: Джеффрис Г., Земля, ИЛ, М., 1960.] Для реолога большой интерес представляет первое издание. Джеффрис ввел термины «упруго-вязкость» и «псевдовязкость».
- L e a d e r m a n H., Physics of High Polymers, Utrecht, 1951.
- N a d a i A., Theory of Flow and Fracture of Solids, N. Y., McGraw Hill Book Co., 1950. [Русский перевод: Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, ИЛ, М., 1954.]
- P h i l i p p o f f W., Viscosität der Kolloide, Dresden — Leipzig, Steinkopf-Verlag, 1942.
- S c o t t B l a i r G. W., A Survey of General and Applied Rheology, London, Pitman & Sons, 1949. Изложены интегральные методы и психофизические представления в реологии.
- S t u a r t H. A. (редактор), Die Physik der Hochpolymeren, Berlin, Springer, 1956, vol. IV с главами Ставермана (S t a v e r m a n A. J.), Шварцля (S c h w a r z l F.), Трелоара (T r e l o a r L. R. G.) и Ферри (F e r r y J. D.).
- T r e l o a r L. R. G., The Physics of Rubber Elasticity, Oxford, Clarendon Press, 1949 ²⁾. [Русский перевод: Трелоар Л., Физика упругости каучука, ИЛ, М., 1953.]
- Если предполагается проведение реологических экспериментов, то рекомендуем прочитать: B u r g e r s J. M., S c o t t B l a i r G. W., Report on Principles of Rheological Nomenclature, Amsterdam, 1949.
- Серия монографий о «реологическом поведении натуральных и синтетических продуктов» редактировалась Бюргерсом (B u r g e r s

¹⁾ В 1957 г. вышло второе издание этой книги на немецком языке. (Прим. ред.)

²⁾ В 1958 г. вышло второе издание этой книги. (Прим. ред.)

- J. M.), Хермансом (H e r m a n s J. J.), Скотт-Блером (S c o t t B l a i r G. W.) и издана Северо-Голландской издательской компанией (North Holland Publishing Co., Amsterdam). Она содержит следующие издания: F r e y - W y s s l i n g A. (редактор), *Deformation and Flow in Biological Systems* (1952). Здесь рассматриваются протоплазма, мускулы, стенки растительных клеток, латексы, кровь, лимфа, спинномозговые, внутри- и внеглазные жидкости и гормоны. H e r m a n s J. J. (редактор), *Flow Properties of Dispersed Systems* (1953); рассматриваются суспензии, эмульсии, гели, разбавленные растворы непроницаемых жестких частиц и гибких цепных молекул, движение капель жидкости и их распыление, пены, дым, порошки. M e r e d i t h R. (редактор), *Mechanical Properties of Wood and Paper* (1953). R e i n e r M. (редактор), *Building Materials, their Elasticity and Inelasticity* (1954); обсуждаются реологические свойства металлов, древесины, алебаstra и его растворов, бетонных растворов, бетона и железобетона, асфальтов, грунтов, естественных камней, глины и вспомогательных материалов.

Статьи, имеющие наиболее важное историческое значение

- L o r d K e l v i n (W. T h o m s o n), «Elasticity», *Encyclopedia Britannica*. 9th ed., 1875; *Papers* 3, London, 1890. Чтение этого труда даже в настоящее время принесет большую пользу.
- E i n s t e i n A., *Ann. Physik* **19**, 289 (1906); **34**, 591 (1911). Первая работа по микрореологии.
- M a x w e l l J. C., *Phil. Mag.* (4) **35**, 129, 185 (1868). Вводится понятие о релаксации напряжений.
- B i n g h a m E. C., G r e e n H., *Proc. Amer. Assoc. Testing Materials* II, **19**, 640 (1919). Эта работа положила начало реологии.
- P o u n t i n g J. H., T h o m s o n J. J., *Properties of Matter*, London, 1902. Эти авторы впервые применили механические модели.
- P o u n t i n g J. H., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A* **82**, 546 (1909); **86**, 534 (1912). Первое экспериментальное наблюдение эффекта второго порядка в упругости.
- M u r n a g h a n F. D., *Amer. J. Math.* **59**, 235 (1937). Впервые применена тензорная символика в упругости.
- R e i n e r M., *Amer. J. Math.* **67**, 350 (1945); **70**, 433 (1948). Установлено изотропное соотношение между двумя тензорами второго ранга, из которого вытекают эффекты второго порядка в вязких и упругих средах.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — площадь.	r — радиус или координата.
a — ускорение.	s — вектор.
B, B_l — объемные силы.	s_{lm} — тензор напряжений.
C — постоянная.	s_n — напряжение.
D, D_{lm} — деформация.	T — число Труделла.
d — расстояние, а также знак дифференциала.	T_{rel} — время релаксации.
d_{lm} — тензор бесконечно малой деформации Коши.	T_{ret} — время последействия.
d_v — всестороннее расширение.	t — время, а также индекс, обозначающий тангенциальное направление.
ds — вектор линейного элемента.	t — вектор касательной.
E — модуль Юнга.	t_{lm} — тензор (любой).
e, e_{lm} — упругая деформация.	u, u_l — перемещение.
e_k — удельная кинетическая энергия.	v — индекс, относящийся к объему.
f, f_{lm} — тензор скоростей деформации.	v, v_l — скорость.
f_v — изотропная компонента тензора скоростей деформации.	w — удельная работа.
g — ускорение свободного падения.	\dot{w} — удельная мощность.
g_{lm} — метрический тензор.	\dot{w}_s — удельная мощность напряжений.
i, j, k — главные направления.	x — начальная координата.
l — тензорный индекс.	x_l — конечная координата.
M, M_z — крутящий момент.	y — координата.
m — тензорный индекс.	z — координата.
n — индекс нормали.	α — немой индекс.
n — вектор нормали.	Γ_{lm} — градиент конечных перемещений.
(0) — индекс девиатора.	Υ, Υ_{lm} — градиент бесконечно малых перемещений.
O — число Олдройда.	$\dot{\Upsilon}$ — градиент скорости.
P, P_l — нагрузка.	Δ — разность, приращение.
p — давление.	δ_{lm} — символ Кронекера.
p_m — среднее давление.	ε_{lm} — тензор бесконечно малой деформации.
R — радиус.	

ε_v — объемная деформация.	$\tau_n = s_{nt}$ — тангенциальная компонента напряжений.
ζ — объемная вязкость	Φ — плотность свободной энергии.
θ — угловая координата	ψ — плотность связанной энергии.
ϑ — предел текучести.	ω_{lm} — тензор бесконечно малого поворота.
η — сдвиговая вязкость.	$\dot{}$ — производная по времени.
κ — объемный модуль.	I — первый инвариант.
λ — постоянная Ляме.	II — второй инвариант.
λ_T — коэффициент Трутона.	III — третий инвариант.
μ — модуль сдвига.	$ $ — параллельное соединение.
ν — коэффициент Пуассона.	--- — последовательное соединение.
ρ — плотность.	
Σ — знак суммирования.	
$\sigma_n = s_{nn}$ — нормальная компонента напряжений.	

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алманси (Almansi) 124
 Алфрей (Alfrey T.) 214
 Андраде (Andrade C. E. N.) 192
 Арнан (Arnan A.) 189
 Арнштейн (Arnstein A.) 180
- Бах (Bach) 109
 Бельтрами (Beltrami) 158
 Бен-Ари (Ben-Arie M.) 212
 Бересфорд (Beresford F. D.) 112
 Бернаулли Д. (Bernoulli D.) 105, 106
 Берри (Berry D. S.) 112
 Бестул (Bestul A. B.) 213
 Бингам (Bingham E. C.) 45, 48, 49, 111, 116, 205, 216
 Блейки (Blakey F. A.) 112
 Блотт (Blott J. F. T.) 155
 Босуэрс (Bosworth R. C. L.) 94
 Брайант (Bryant C. B.) 213
 Браун (Braun I.) 21, 22, 147, 196, 211
 Бриджмен (Bridgman P. W.) 107
- Броэр (Broer L. J. F.) 204
 Бургерс (Burgers J. M.) 46, 151, 172, 173, 215
 Ванд (Vand V.) 178
 Ван-дер-Поль (Van der Pohl) 110
 Вейссенберг (Weissenberg K.) 18, 150, 151, 159
 Вельтман (Weltmann R. N.) 213
 Вильямсон (Williamson R. V.) 184
 Волярович М. П. 52, 54, 55, 85, 203
 Вуд (Wood W. A.) 132
- Гаген (Hagen) 202
 Гатчек (Hatschek E.) 80, 183, 203
 Гейрингер (Geiringer H.) 89
 Гекклер (Geckler R. D.) 205
 Гесс (Hess W. R.) 65
 Гизекус (Giesekeus H.) 210, 212
 Гленвилл (Glanville W. H.) 94
 Граммель (Grammel R.) 66, 116
 Грин (Green H.) 9, 45, 48, 49, 55, 197, 201, 213, 215, 216
 Гринсмит (Greensmith H. V.) 151, 152
 Гросс (Gross B.) 89, 215
 Гуль В. Е. 214
 Гут (Guth E.) 173, 178
- Дальгрен (Dahlgren S. E.) 213
 Де-Вале (De Waele) 205
 Де-Уитт (De Witt T. W.) 151, 210
 Джейн (Jane R. S.) 80, 183
 Джеффри (Jeffery G. B.) 172, 173
 Джеффорд (Jefford J. V.) 202
- Джеффрис (Jeffreys H.) 32, 60, 69, 153, 154, 215
- Зак (Sack R.) 171, 174, 176
 Зеттлемойер (Zettlemoyer A. C.) 212
 Зильдерберг (Silderberg A.) 198
 Зинер (Zener C.) 73
- Ирме (Irmai S.) 86
- Карим (Karim S. M.) 93
 Карман (v. Kármán Th.) 109, 214
 Карни (Karni) 21
 Качальский (Katchalsky A.) 197
 Кельвин, лорд, см. Томсон
 Кербер (Koerber) 125
 Кирквуд (Kirkwood J. G.) 212
 Кирхгоф (Kirchhoff) 124
 Коши (Cauchy A.) 92, 96
 Кракауэр (Krakauer V. O.) 205
 Кремер (Kraemer E. O.) 178, 184
 Кроутер (Crowther E. M.) 52
 Кубат (Kubát) 88
 Кулаков Н. Н. 52
 Кун (Kuhn W.) 89
 Кунс (Kuhns P. W.) 213
 Кунцле (Kunzle O.) 89
 Куэтт (Couette) 203
- Лакс-Вейнер (Lax-Weiner K.) 151
 Ламб (Lamb H.) 214
 Леви (Lévy M.) 38
 Леви С. М. 203
 Лесерсич (Lethersich W.) 46, 192, 193, 194, 195
 Ли (Lee A. R.) 94, 132
 Лидерман (Leaderman H.) 215
 Литвинишин (Litwiniszyn J.) 202, 203
 Лифсон (Lifson S.) 212
 Льюис (Lewis H. K.) 214
 Ляв (Love A. E. H.) 124, 129, 174, 206, 207, 214
- Майрс (Myers P. J.) 212
 Мак-Коннел (McConnell A. J.) 21
 Максвелл (Maxwell J. C.) 48, 65, 66, 152, 154, 216
 Марк (Mark H.) 173
 Марквик (Markwick A. H.) 132
 Мейкснер (Meixner J.) 35
 Мекензи (Mackenzie J. K.) 174, 175
 Мередит (Meredith R.) 216
 Мескат (Maskat W.) 213
 Мизес (v. Mises R.) 19, 39, 160, 212
 Моко (Mocquot G.) 8

- Муни (Mooney M.) 115, 116, 151, 152, 179
 Мурнаган (Murnaghan F. D.) 125, 216
 Надаи (Nádai A.) 29, 211, 214, 215
 Найесли (Kniesely M. H.) 202
 Наттинг (Nutting) 90
 Невилл (Neville A. M.) 212
 Нолль (Noll W.) 130
 Олдройд (Oldroyd J. G.) 31, 50, 57, 58, 98, 151, 173, 176, 211
 Оллendorф (Ollendorf) 21
 Ольшак (Olszak W.) 105, 203
 Оствальд (Ostwald W.) 117, 118, 172, 205
 Павловский (Pawlowsky J.) 206
 Падден (Padden F. J.) 210
 Пападакис (Papadakis M.) 203
 Пасли (Paslay P. R.) 203
 Паэз (Paez A.) 202
 Пойнтинг (Poynnting J. H.) 73, 139, 141, 142, 145, 146, 216
 Поппер (Popper B.) 153, 157
 Прагер (Prager W.) 40, 86, 214
 Прандтль (Prandtl L.) 206
 Пуазейль (Poiseuille) 202
 Пуассон (Poisson) 92, 96
 Пфейфер (Pfeiffer T. Ph.) 165
 Райзман (Riseman J.) 212
 Рейгер (Reiger R.) 154
 Рейнер (Reiner M.) 8, 9, 26, 65, 94, 95, 96, 109, 111, 117, 121, 132, 138, 139, 145, 146, 147, 151, 153, 157, 159, 161, 163, 180, 183, 188, 189, 191, 192, 201, 204, 206, 207, 213, 214, 216
 Рейнольдс (Reynolds O.) 132
 Ренкин (Rankine) 46, 78
 Ривлин (Rivlin R. S.) 116, 147, 151, 152, 183
 Ригден (Rigden P. J.) 94, 212
 Робертс (Roberts J. E.) 152
 Розенхед (Rosenhead L.) 93
 Романский А. Н. 52
 Сал (Saal R. N.) 165
 Самарина К. И. 55, 85
 Свейнгер (Swainger K.) 124, 125, 193
 Свифт (Swift H. W.) 146
 Симха (Simha R.) 173, 178, 180
 Скотт-Блер (Scott Blair G. W.) 8, 11, 46, 52, 57, 80, 81, 84, 85, 90, 151, 188, 197, 202, 215
 Слибар (Slibar A.) 203
 Смолюховский (Smoluchowski M.) 173
 Снеддон (Sneddon I. N.) 112
 Сокольников И. С. (Sokolnikoff I. S.) 16
 Сроуер (Thrower E. N.) 94
 Ставерман (Staverman A. J.) 89, 114, 215
 Стокс (Stokes) 95
 Стюарт (Stuart H. A.) 89, 215
 Сунни (Sweeny K. H.) 205
 Тейновитц (Teinowitz M.) 189
 Тим (Timm T.) 205
 Тимошенко С. П. 109
 Толстой Д. М. 54
 Томас (Thomas F. C.) 94
 Томсон В., лорд Кельвин (Thomson W.) 9, 44, 45, 61, 73, 132, 158, 175, 216
 Томсон Дж. Дж. (Thomson J. J.) 216
 Торделла (Tordella J. P.) 211
 Торнтон (Thornton) 213
 Торроха (Torroja E.) 202
 Траум (Traum E.) 196
 Трелоар (Treloar L. R. G.) 215
 Трусделл (Truesdell C.) 21, 124, 129, 146, 154, 155, 214
 Трутон (Trouton F.) 37, 46, 78, 188
 Тэйлор (Taylor G. I.) 173
 Тэт (Tait P. G.) 175
 Тябин Н. В. 80
 Ферри (Ferry J. L.) 215
 Филиппов (Philippoff W.) 122, 215
 Форслинд (Forslind) 9
 Фрей (Frei E. H.) 213
 Фрей-Висслинг (Frey-Wissling A.) 216
 Фрейденталь (Freudenthal A.) 65, 89, 163, 215
 Фрейндлих (Freundlich H.) 197
 Фрелих (Fröelich H.) 171, 174, 176
 Ханин (Hanin M.) 26
 Хашин (Hashin A.) 164, 175, 176
 Хенки (Henscky H.) 31, 101, 107, 124, 159
 Херманс (Hermans J. J.) 20, 173, 215, 216
 Хилл (Hill R.) 39, 214
 Ходж (Hodge P. G.) 40, 214
 Хозенмэр (Hohenemser K.) 86
 Хубер (Huber M. T.) 158, 159
 Хувинк (Houwink R.) 215
 Церна (Zerna W.) 31
 Чалмерс (Chalmers B.) 192
 Шварцль (Schwarzl F.) 89, 215
 Шведов Ф. Н. 46, 80
 Шеле (Scheele W.) 205
 Шенфельд-Рейнер (Schoenfeld-Reiner R.) 121, 151, 196
 Шофилд (Schofield R. K.) 46, 57, 80, 81, 84, 85
 Шульц-Грунов (Schultz-Grunow F.) 206, 211
 Эйзенберг (Eisenberg H.) 213
 Эйзеншитц (Eisenschitz R.) 172, 173
 Эйнштейн (Einstein A.) 11, 168, 172, 216
 Эйринг (Eyring J.) 94
 Эйрих (Eirich F. R.) 215
 Элиасаф (Eliassaf J.) 198
 Эрмит (L'Hermite) 197

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адгезия 200
 Анализ реологический 164
 Антитиксотропия 197
- Бельтрами теория прочности 158, 159
 Больцмана постулат 12
 Бингама тело 45, 48, 49, 85, 86
 Бюргерса тело 32, 46, 75, 85
- Вискозиметр 188
 Восстановление 200
 Впитывание 32
 Время последействия 92
 — релаксации 64, 92
 Высокополимеры 114
 Вязкость истинная 122
 — концентрированной дисперсии 178
 — объемная 91
 — — Кельвина 61
 — — релаксационная 94
 — пластическая 49
 — последействия 92
 — — объемная 61
 — релаксационная 92
 — структурная 105, 116, 117, 181, 186, 197
 — эффективная 122
 Вязко-упругость 32, 75, 85
- Гель 9, 164
 Гель пластический 78
 — релаксирующий 69
 Гиббса — Гельмгольца соотношения 18
 Гладкость 200
 Гомология логарифмическая 90
 Гука тело 19, 34, 41, 86, 87, 105, 159
 — — твердое 34
- Давление приведенное 107
 — среднее 16
 Девиатор напряжений 16
 Деформация 7
 — абсолютная 13
 — вязкая 190
 — конечная 139
 — логарифмическая 101
 — остаточная 190
 — относительная 13
 — пластическая мгновенная 110
 — — ограниченная 40
 — «псевдоконечная» 36
- Деформация упругая 7, 8, 190
 — — запаздывающая 190
 — — объема 15
 — — предельная 39
 Джеффриса тело 46, 69
 Диаграмма Мора 29
 Дилатансия 131
 — пластическая 132
 — упругая 132, 145
 Дисперсия в жидкости 172
 — в твердом теле 174
 Древо реологическое 41
 Дуктильность 201
- Евклида тело 19
- Жидкость идеальная** 19
 — максвеллова 117
 — неньютонова 105, 117
 — ньютонова 19, 36, 41, 160
 — — нелинейная 105
 — — обобщенная 105
 — Паскаля 19
 — псевдопластическая 116
 — Рейнера — Ривлина 147
- Закон Баха — Шюле 109
 — Ньютона о вязкости 37
 Запаздывание 32
 Затухание вязкое 92
 Золь 9, 10, 164
 — разбавленный 168
 — упругий 66
- Инварианты Трусделла 104
- Кавитация 161
 Квазилинейность 102
 Кельвина тело 44, 47, 58, 85, 86, 87, 88, 162
 Клейкость 32, 200
 Ковкость 32
 Консистентность 55, 187
 Константа материальная характеристическая 178
 Концентрация напряжений 110
 Коэффициент вязкости второй 93
 — — при растяжении 37
 — — при сдвиге 36
 — Пуассона 35
 — реологический 19
 — самозаполнения 179
 — текучести 37
 — угловатости 200

- Кривая испытания реологическая 189
 — — техническая 189
 — — консистентности 55, 122
 — Оствальда 118
 — относительной консистентности 187
 Критерии прочности классические 158
 — — реологические 161
 Критерий ползучести Хенки 159
 — прочности Хубера 159
 — текучести Мизеса 160
 Круги Мора 28, 29
 Линейность тензорная 102
 Липкость 200
 Макродеформация остаточная 110
 Макрореология 8
 Максвелла тело 45, 63, 85, 86, 87, 88, 152, 163
 Материал квазизотропный 10
 — квазиоднородный 10
 Мера деформации 138
 — — конечной 123
 — — по Алманси 125
 — — по Грину 125
 — — по Коши 14, 123
 — — по Хенки 125, 204
 Метареология 11
 Микромеритика 200
 Микрореология 11, 164
 Мицелла 165
 Модуль жесткости 110
 — объемный 106
 — реологический 19
 — сдвига 34
 — упругой дилатансии 132
 — упругости 92
 — — второго рода 34
 — Юнга 35
 — —, его изменение 108
 Молекула Эйринга 96
 Мора диаграмма 29
 — круги 28, 29
 Морщинистость 200
 Напряжение поперечное 131
 Нелинейность геометрическая 102, 123
 — физическая 102, 103, 105
 — тензорная 102, 138
 Неровность поверхности 200
 — частиц 200
 Неупругость 32, 73
 Ньютона тело 41, 86
 Объем предельный относительный 107
 Олдройда число 58
 Паскаля жидкость 19
 Пенетрация 32, 201
 Переменная консистентная 55
 Пластичность динамическая 32
 — идеальная 20
 Плотность свободной внутренней энергии 18
 — связанной энергии 18
 — тензорная 106
 Поверхность текучести 58
 Пойнтинга — Томсона тело 46, 73, 85
 Ползучесть 190
 — неустановившаяся 60
 — установившаяся 65
 Последствие 32
 — упругое 58, 190
 — — обратное 60
 — — при разгрузке 60
 Постулат Больцмана 12
 Прандтля тело 39
 Преддействие 32
 — упругое 60
 Предел текучести 7, 38, 92
 Прочность 32, 158, 159
 —, классические критерии 158
 —, теория Бельтрами 158, 159
 —, — Хенки 158
 —, — Хубера 158
 Псевдовязкость 61, 85
 Псевдопластик 205
 Пуассона коэффициент 35
 Работа напряжений 161
 — упругой деформации 18, 33, 159, 161
 Разрыв местный 110
 Разупрочнение, деформационное 201
 Рейнера уравнение 26
 Рейнольдса число 58
 Релаксация 32
 Реодеструкция 200
 Реология 7, 8, 18
 — феноменологическая 8
 Реометр 188
 Реометрия 20, 188
 Реопексия 200
 Ровность 200
 Свойства материала реологические 31
 — — технологические 32, 196
 Сдвиг вращательный 133
 — простой 13
 — телескопический 133
 Сен-Венана — Прандтля тело 159
 Сен-Венана тело 19, 38, 41, 86
 Система дисперсная 9, 164
 — — высокой концентрации 177
 — — координат конвективная 29
 — — цилиндрическая 29
 Скорость деформации 100, 102
 Слой пограничный пластический 58
 Соотношение Стокса 63
 Соотношения Гиббса — Гельмгольца 18
 Спектр времен последствия 89
 — — релаксации 89
 Способность кроющая 32
 Среда дисперсионная 9
 Степень растяжения главная 124
 Студень 9, 164

Суспензия 9
Схватывание 200

Текучесть покоящейся жидкости 119

Тело абсолютно твердое 19
— Бингама 45, 48, 49, 85, 86
— Бюргерса 32, 46, 75, 85
— вязко-пластическое 48
— гомотермическое 86
— Гука 19, 41, 86, 87, 159
— — нелинейное 105
— — обобщенное 105
— — твердое 34
— Джеффриса 46, 69, 85
— Евклида 35
— Кельвина 44, 47, 58, 85, 86, 87, 88, 162
— Лесерсича 66
— линейное обобщенное 86
— Максвелла 45, 63, 85, 86, 87, 88, 163
— — идеальное 152
Тело Ньютона 41, 86
— Пойнтинга — Томсона 46, 73, 85
— Прандтля 39
— Сен-Венана 19, 38, 41, 86
— Сен-Венана — Прандтля 159
— твердое евклидово 19
— Трутона — Ренкина 46
— Фойгта 48
— Шведова 46, 78, 85
— Шофилда — Скотта-Блера 46, 85
— экзотермическое 86
— эндотермическое 86

Тензор бесконечно малой упругой деформации 14
— вырожденный 16
— градиентов смещения 13
— деформации 14
— конечной деформации 15
— скоростей деформации 14
— течения 14

Термовосстановление 200

Течение вязкое 7
— объемное 23, 94
— пластическое 7, 40

Тиксотропия 32, 197

Трение внутреннее 39

Трутона — Ренкина тело 46

Турбулентность структурная 201

Упрочнение деформационное 201

Упруго-вязкость 63, 65, 85

Упругость 8

— внутримиецеллярная 165
— запаздывающая 32, 85
— кинетическая 112, 114
— нелинейная 138
— поперечная 129
— потенциальная 112, 114
— предельная 159
— резиноподобная 113, 114
— течения 200

Уравнение Букингама — Рейнера 52

— Гагена — Пуазейля 52
— Маргулиса 54
— Муни 116
— Наттинга — Скотт-Блера 90
— Рейнера 26
— Рейнера — Ривлина 54
— реологическое 18, 19
— состояния реологического 18
— Стокса 93

Уравнения движения 16

— Ляме 35
— Навье-Стокса 38
— равновесия 16

Фаза дисперсная 9

— сплошная 9

Фазы дисперсной системы 9, 164

Фактор времени 86

Фойгта тело 48

Функция тензорная изотропная 24

Хенки теория прочности 158.

Хубера теория прочности 158

Число Олдройда 58

— Рейнольдса 58

Шведова тело 46, 78, 85

Шероховатость 200

Шофилда — Скотт-Блера тело 46, 85

Юнга модуль 35

Эмульсия 9, 167

Эффект Вейсенберга 150, 153, 155

— запаздывания 60

— Пойнтинга 141

— σ 57.

Эффекты второго порядка 98, 146

— первого порядка 98

М. Рейнер

Реология

М., 1965 г., 224 стр. с илл.

Редактор *Н. И. Гамаюнов*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 18/XI 1964 г. Подписано к печати 8/III 1965 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$. Физ. печ. л. 7. Условн. печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 10,73. Тираж 5100 экз. Цена книги 74 коп. Заказ № 602.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16

Главполиграфпрома Государственного
комитета Совета Министров СССР по печати.
Москва, Трехпрудный пер., 9